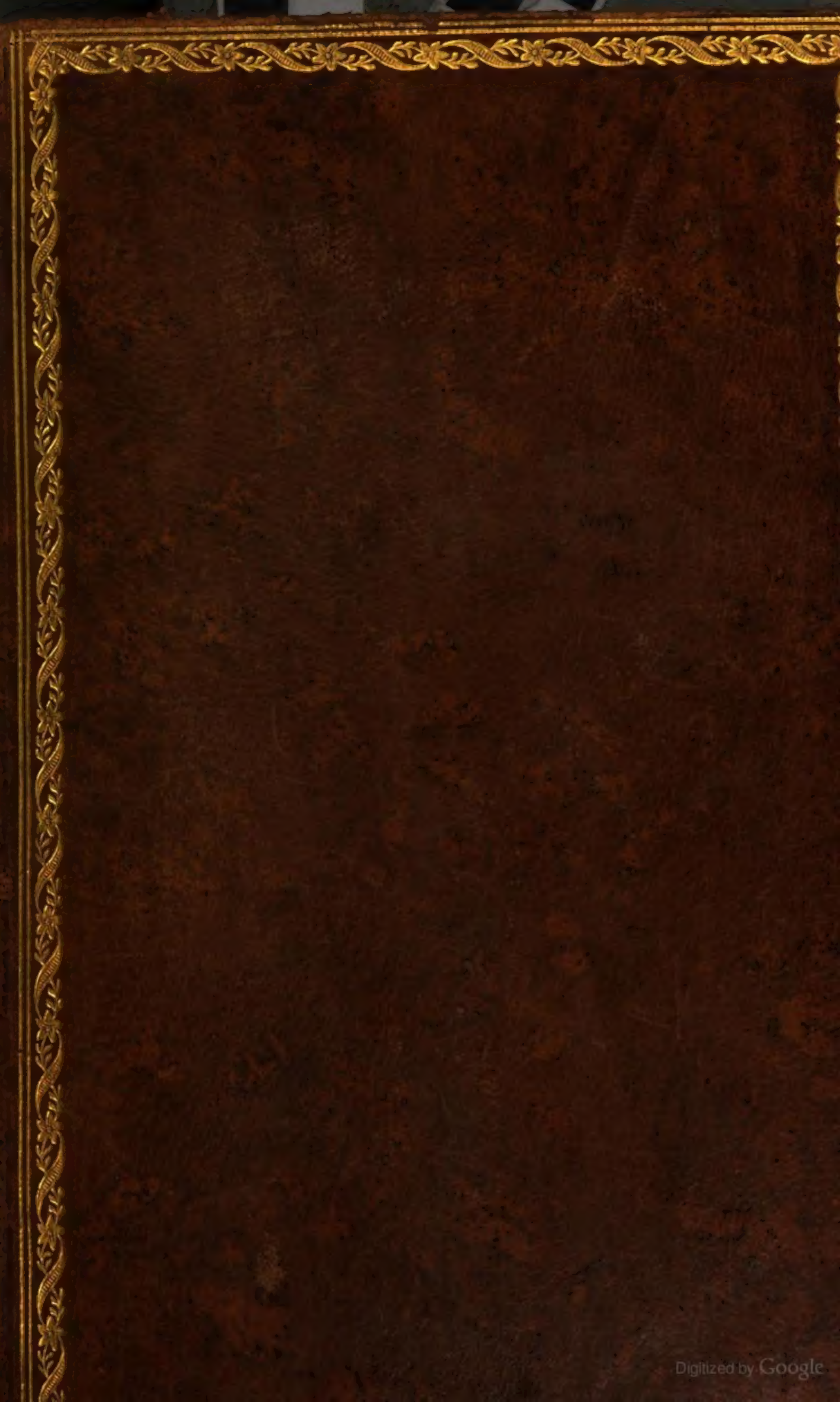
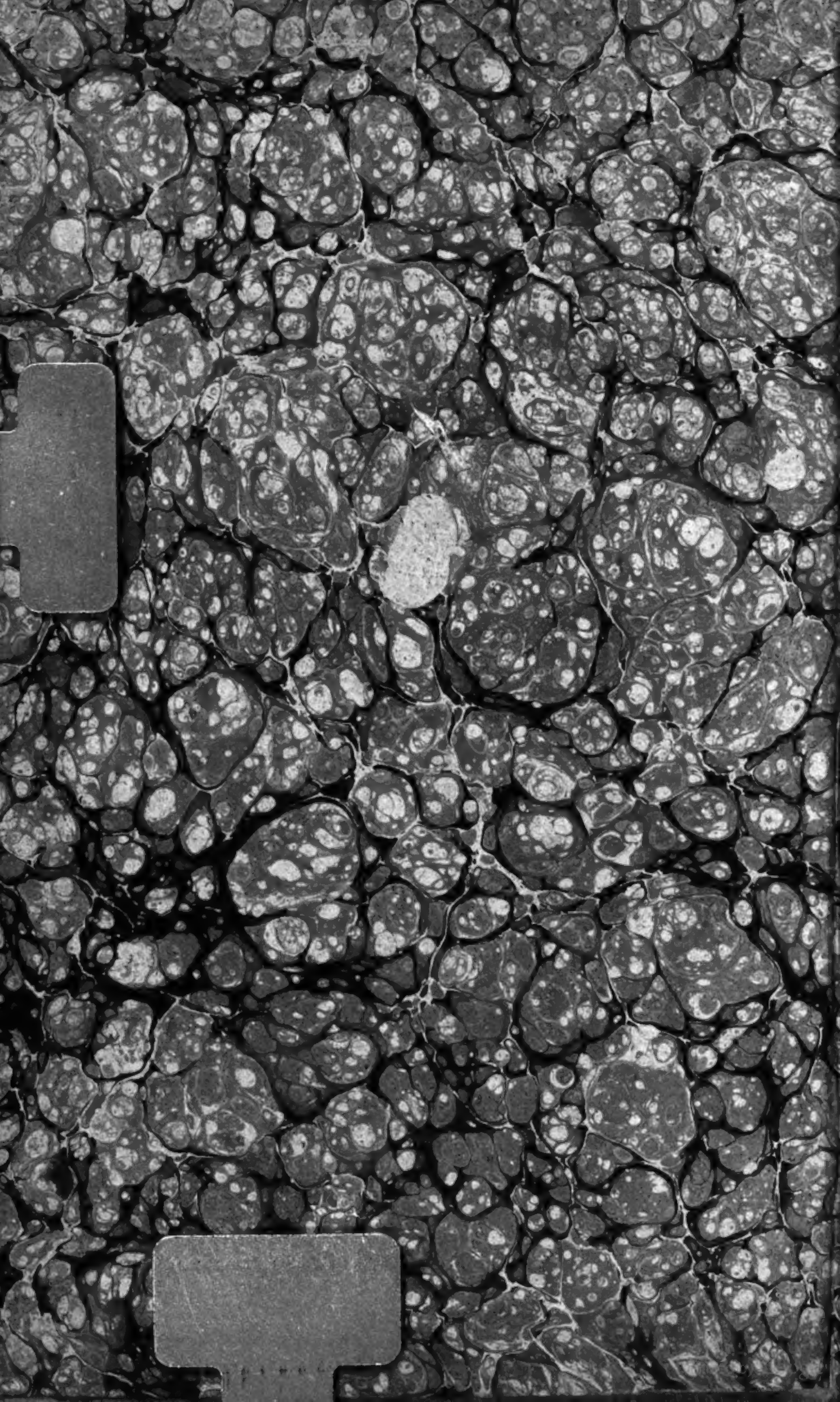
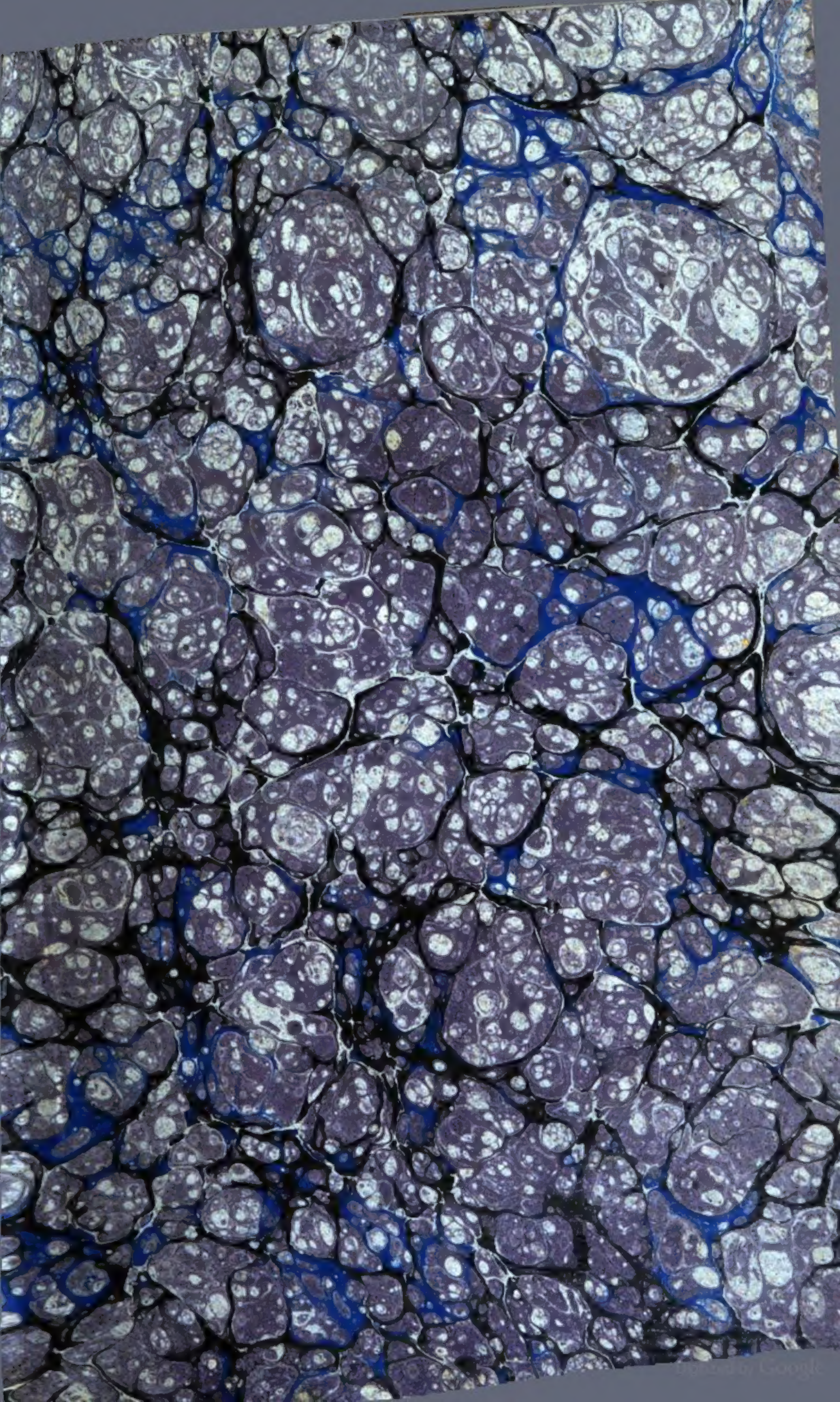






CORSO

DI

GEOMETRIA ELEMENTARE

DIVISO IN DUE VOLUMI

VOL. II.

Che contiene i Libri undecimo, e duodecimo degli Elementi di EUCLIDE; ed una nuova esposizione de primo Libro di ARCHIMEDE sulla Sfera, e sul Cilindro, e dell'altro della Misura del Cerchio: con note in fine.



L' UNDECIMO E DUODECIMO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

EMENDATI IN QUE' LUOGHI NE' QUALI UNA VOLTA FURONO VIZIATI DA TEONE, O DA ALTRI, E RESTITUITEVI ALCUNE DEFINIZIONI, E DIMOSTRAZIONI DELLO STESSO EUCLIDE.

DA V. FLAUTI

TERZA EDIZIONE

Optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt.

TOR. Praef. in ARCH.

NAPOLI

NELLA STAMPERIA DE' FRATELLI CHIANESE

1813.







PREFAZIONE

Gli Elementi di Euclide così detti vengon compresi ordinariamente in XV. libri, de' quali i primi due, come finora si è veduto nel primo volume di questo Corso, han per oggetto la natura e le proprietà de' triangoli e de' parallelogrammi, colle verità che a queste sono correlative, ed i problemi, che ne dipendono: il III° si occupa del cerchio; e nel IV° si tratta di alcune figure regolari iscrittibili e circoscrittibili ad esso co' metodi della Geometria Elementare. Nel V° si esamina la grandezza in generale paragonata ad un altra; e questo libro, che per incidenza trovasi compreso tra quelli di Geometria Elementare, non appartenendo ad essa esclusivamente, è un' immensa miniera di ripieghi geometrici, onde risolvere infiniti ardui Problemi, e per dimostrar molte verità complicate, che invano si tenterebbero altrimenti. Esso forma in somma la base de' metodi di risoluzione impiegati dagli antichi nello scioglimento de' Problemi, e nella dimostrazione de' Teoremi. Finalmente nel VI° libro si trovano applicate le teorie generali esposte nel V° a' rapporti speciali, che serbansi tra loro le diverse figure piane rettili-

nee; donde infiniti Problemi riguardanti tali figure possonsi anche facilmente risolvere.

Esaurita in tal modo questa parte di Geometria, che riguardava le figure piane, par ragionevole ch' Euclide avesse dovuto passare ad occuparsi delle stesse ricerche pe' solidi. Intanto queste altre teorie da tutti gli antichi, ed i moderni espositori degli Elementi vengon comprese nell' XI°, XII°, e XIII° libro, e tra quelli e questi vi si trovan frapposti quattro altri libri, de' quali i primi tre, cioè il VII°, VIII°, e IX° trattano di alcune teorie generali ed astratte concernenti la quantità discreta, cioè i uumeri. E questi libri che oggi giorno, dopo l' invenzione della volgare Aritmetica, e della speciosa sono poco letti, contengono una profonda dottrina, e delle verità grandi per coloro che si occupano delle ricerche aritmetiche. Si trovano in fatti dimostrate in essi molte verità, e risoluti alcuni Problemi in una maniera preferibile a quella che taluni valentissimi Analisti hanno tenuta nelle loro opere, avvalendosi delle immense risorse, che offre per tal argomento l' Analisi moderna. Nel X° libro poi si ragiona estesamente delle quantità incommensurabili, ed irrazionali, e con tale profondità, che senza dubbio alcuno può dirsi, che forse con tutti i moderni metodi sarebbe difficile a chiunque il poter con pari precisione, chiarezza e brevità fare altrettanto. Ma eccone

di questi libri un'indicazione un poco più estesa.

Il VII° libro ha 41 proposizioni, delle quali 35 Teoremi, e 6 Problemi. Que' Teoremi espongono la natura de' numeri *primi*, e molte proprietà riguardanti il rapporto de' numeri, analoghe a quelle, che per la grandezza in generale si erane dimostrate nel lib. V°; e nella Prop. 16 vi si dimostra con maggior precisione che non ha fatto qualche moderno Analista, che *non si altera il prodotto di due numeri, se l' un di essi si multiplichi per l'altro, o pur questo per quello.* I problemi poi di questo libro hanno per oggetto il *rinvenire la massima comune misura di due o più numeri dati non primi tra loro*; la qual ricerca e condotta in un modo analogo a quello di cui ci serviamo nella nostra volgare Aritmetica, e nella speciosa; o pur *la minima comune misura*; il *determinare tra tutti i numeri che hanno un dato rapporto quelli che sono primi tra loro*; e finalmente il *ritrovare un numero minimo che abbia parti date*.

L' VIII° libro contiene 15 Teoremi, e 2 Problemi. Ne' Teoremi Euclide comprende le ricerche su i numeri primi, espone alcune altre singolari proprietà sulla proporzion de' numeri, e quelle de' numeri *piani e solidi*, e de' numeri *quadrati e cubi*, le definizioni de' quali erano state da lui premesse al libro VII°; e tra essa merita principalmente d' es-

ser notato il 5°, ove si dimostra, che i *numeri piani hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni de' lati*; donde il Simson e noi abbiamo ricavato un sicuro argomento per conchiudere, che non è di Euclide l'ordinaria definizione della ragion composta che trovasi al principio del lib. VI°(*Veg. la nota alla def. A del lib. V° nel vol.* 1). Ne'due Problemi poi si propone egli a *rinvenire de' numeri minimi continuamente proporzionali, la ragion de' quali sia data*; e *de' numeri minimi in continua proporzione, che serbinsi qualunque ragioni date tra numeri anche minimi*.

Continua nel libro IX°, che ha 36 Proposizioni, cioè 34 Teoremi, e 2 Problemi, ne' primi ad esporre la natura de' numeri quadrati, e cubi, ed alcune altre proprietà della proporzion de' numeri, e de' numeri primi. Tra questi è degno di massima avvertenza l' ultimo in cui dimostra, che *se dall' unità in poi si prendano de' numeri continuamente proporzionali in ragion doppia, finchè quel numero che risulta dalla somma di tutti questi termini sia primo; una tal somma multiplicata nell'ultimo di que' numeri proporzionali darà per prodotto un numero perfetto*, cioè *uguale a tutte le sue parti prese insieme* (1); la qual ricerca, che fa molto onore al geometra antico che ne fu

(1) *def.* 22. VII.

l'inventore, trattata anche co'nostri mezzi attuali, dice bene il Sig. Montucla, esige un artifizio particolare (2). L'oggetto poi de' due Problemi di questo libro si è il *determinare se possa rinvenirsi dopo due numeri dati il terzo proporzionale, o il quarto dopo tre.*

Finalmente il libro X° tiene 117 Proposizioni, e 93 di esse sono Teoremi, ne' quali si espongono le caratteristiche delle quantità *incommensurabili*, e delle *commensurabili* (3); ove tra le altre cose si dimostra, che il rapporto di queste sia esprimibile in numeri, e non così quello delle prime; e lo stesso pe' quadrati, e cubi, che da tali quantità si formano: donde se ne deduce la bella verità, che *le linee rette commenmensurabili in lunghezza, lo sono anche in potenza*, cioè ne' quadrati e ne' cubi; ma che al contrario *quelle linee rette, che sono commensurabili in potenza, non lo sono sempre in lunghezza*: di più che *le linee rette incommensurabili in lunghezza; non lo sono sempre in potenza*; che

(2) Il Sig. Montucla nel parlar di una tal ricerca la dà come esposta in un Problema: essa però non vien recata da Euclide che in forma di Teorema.

(3) Il concetto di tali graddezze vien da Euclide chiaramente stabilito nelle deff. 1,2 del libro X°, e nelle seguenti sono caratterizzate le differenti specie, ed i diversi ordini d' incommensurabili, e le quantità così dette *razionali*, ed *irrazionali*. L'esistenza di queste grandezze in Geometria, che vien da Euclide comprovata nel presente libro, come si dirà nel decorso di questa Prefazione, rende nullo ogni concetto aritmetico per istabilire l' uguaglianza delle ragioni,

quelle poi che sono incommensurabili in potenza debbono esserle anche in lunghezza (4). In seguito passa a trattare delle quantità irrazionali(5), e dalla teoria che su queste stabilisce ne deriva nuove verità per le quantità incommensurabili. In somma son tante le cose ch' Euclide dimostra in questo libro, che sarebbe lo stesso che ecceder di molto i limiti di una semplice indicazione, il volerle qui minutamente notare; che perciò ci ristringeremo a far osservare solamente, ch' egli chiude un tal suo libro col dimostrare, che *la diagonale, ed il lato del quadrato sono incommensurabili tra loro*, e ciò vien eseguito con un artifizio veramente maraviglioso. Egli fa vedere, che per poter un tal rapporto venir espresso da quello di un numero ad un altro, bisognerebbe che un numero fosse nel tempo stesso pare ed impare; il che è impossibile. Ed a questo proposito con molto giudizio così ragiona il Sig. Montucla; » Io non so » se la dimostrazione diretta, poichè ve ne » ha una, sia tanto convincente quanto il ri» piego preso da Euclide; e per questa ragione » mi sembra che quelli i quali nelle loro edizio» ni di Euclide hanno così cambiata una tal dimo» strazione hanno avuto torto. Che che ne sia, ho » vedute molte persone, anche istruite in Geome» tria non dar per dimostrazione di quest'incom-

(4) *Cor. Prop.* 9. *X*. (5) *Teor.* 17 *e segg.*

» mensurabilità, che l' impossibilità di estrarre la
» radice quadrata dal 2 per mezzo dell' appros-
» simazione in decimali . Ma chi è colui che ha
» ancora provato che quest' approssimazione sia
» interminabile ? Ed io ho conosciuto un uomo
» che faceva l' Architetto ostinarsi a continuar-
» la, sperando sempre di giugnere ad un ri-
» sultato esatto . Egli era giunto già alla 100ma
» cifra decimale . Quanti stenti si avrebbe ri-
» sparmiati se avesse letto e capito Euclide (6) !
Inoltre una tal dimostrazione è seguita da una continuazione , che in taluni codici antichi si trova anche esposta come Scolio , ove Euclide offre altri esempj di quantità incommensurabili presi tra le figure piane e solide ; ma di ciò avremo occasione di parlarne più appresso . Intanto per non tralasciar di dire qualche piccola cosa de' Problemi che risolvonsi in questo libro X°, farem notare solamente , che tra gli altri si cerca la massima comune misura di due, di tre , o più quantità commensurabili : certe linee incommensurabili in lunghezza ed in potenza, con certe condizioni date : le quantità così dette *medie* commensurabili in potenza solamente, le quali contengono un razionale , o un medio ec.

Prima di lasciar quest' argomento proporrò per digressione una mia non inutile congettura . L'

(6) *Histoire des Mathematiques Part.* 1. *lib*, *IV*. *num*. *II*.

anello di connessione tra l' Aritmetica, e l' Algebra sono state, come tutti sanno, le quistioni indeterminate proposte su i numeri; ed i libri VII°, VIII°, e IX° degli Elementi ci mostrano ad evidenza, che fin da' primi tempi della Geometria molto si era fatto intorno ad esse. Or s'è così, e se noi troviamo in Euclide usate le lettere alfabetiche per dinotare sì le quantità note, che le incognite de' Problemi Aritmetici su numeri indeterminati; perchè non potrem giustamente dire, che l'introduzione de' simboli nella nostra Aritmetica speciosa abbia avuto un tipo in questi libri Euclidei, ne' quali si trova evidentemente praticata (7)? E s'è così, nè il Francese Vieta, nè alcuno de' nostri Italiani può dirsi a rigore l' autore di quest' importantissima scoperta; e tutto al più potrà loro attribuirsi il merito di aver stabilita la regola, e fissato il costume di usarne. Ma non è questo il luogo da insistere sulla ragionevolezza di ciò che da noi si è asserito, e di cui ci riserbiamo a parlarne con più estensione nell' Introduzione al primo volume del nostro Corso di Analisi.

Qual sia l' oggetto dell' XI°, e del XII° libro, si è già detto di sopra: la teoria de' soli-

(7) Questa nostra congettura si trova anche indicata nel principio del Vol. 1. dell' Opera elaboratissima del P. Cossali che ha per titolo *Origine*, e *trasporto dell'Algebra in Italia*. Ma essa vi è piuttosto contradetta, che sostenuta, come convenivasi.

di si trova in essi saldamente stabilita, ed in modo da non lasciar nulla a desiderare per l' ordine ammirabile con cui è scritta, ch' è certamente pari a quello de' primi sei libri. Intanto non bisogna negare, che in essi non si riconosce quell' istessa precisione nel definire, e rigore nel dimostrare, che il Geometra Greco aveva in questi posto. Ne tal colpa devo a lui attribuirsi; avendo noi già veduto nelle Note al vol. I. quanto avevan maltrattati i primi sei libri gli antichi espositori: e mostreremo inoltre nelle Note a questi due ultimi libri, che debbano a costoro anche attribuirsi queste altre imperfezioni. Le principali di esse consistono nella 9ª, 10ª ed 11ª definizione del lib. XI°, cioè in quella dell'angolo solido, e de' solidi simili, e degli uguali e simili; perchè la prima dovevasi render più chiara, e meno soggetta ad equivoco, e le altre due avevan bisogno di venir confermate prima di essere applicate, come da noi si è fatto (*Vegg. le Note corrispondenti a queste deff.*). Ció facendosi la teoria de' solidi uguali e simili, anzichè trovarsi fondata su di un *principio ruinoso ed atto ad indurre in errore*, come sottilmente ha preteso il Simson (8) l' è solidamente stabilita, e con tutto il rigor che si esige in un libro elementare di Geome-

(8) Si riscontri la Pref. al suo Euclide latino.

tria. Questi due libri avevano di più bisogno di essere esposti con maggior chiarezza, e molte dimostrazioni, e soluzioni dovevan rendersi più brevi, affinchè più facil riuscisse il ritenersi da principianti; e l' una e l' altra di queste cose speriamo che siasi conseguita in questi nostri Elementi. Ed al proposito di quest' ultima essenzialissima condizione per un libro elementare, farem qui notar di passaggio, che nel XII° libro, per mezzo di un semplicissimo principio ricavato da Euclide stesso, del quale egli si prevale nell' ultima Prop. di un tal Libro, ci è riuscito di dimostrare tutti que' Teoremi che riguardano il cerchio, il cilindro, il cono e la sfera in una maniera assai semplice ed uniforme, in modo che il giovine avendo appresa le dimostrazione di uno di essi, e da se solo nel caso di distender le altre. E questo stesso principio ci è anche valuto per dimostrare non pochi Teoremi di Archimede sulla sfera e sul cilindro; donde è che questi tre libri di Solida di Geometri diversi hanno così acquistata anche quell' unità, e quella correlazione che si conveniva ad un libro elementare.

Il XIII° libro degli Elementi trovasi rapportato in poche istituzioni di Geometria, e con ragione, non contenendo una teoria importante ad apprendersi da un giovane principiante. Altronde un tal libro non cessa di essere un buon libro di Geometria Solida, che perciò

non doveva restar interamente dimenticato. Noi abbiamo perciò creduto opportuno di conciliar queste due cose, dandolo in abbozzo in una Nota al libro XI°, dalla quale si potrà ricavare una completa idea di ciò che Euclide ha esposto in un tal libro, ch' è tra quelli di Solida, come il IV° tra i libri di Piana.

Ordinariamente questo XIII° libro trovasi seguito da due altri, che trattan pure de' corpi regolari. Le teorie però ch'essi contengono sono interamente superflue per gli Elementi di Geometria: nè essi sono di Euclide; ma di Ipsicle Alessandrino, e furon malamente aggiunti a' primi 13 libri di quel Geometra da Teone, o da altro antico Comentatore. Con tutto ció anche i più accurati tra i moderni espositori di Euclide gli hanno conservati in questo luogo. Ció che fa veramente maraviglia si è il vedere, che taluni abbian potuto sospettare che questi due libri potessero appartenere ad Euclide. Primieramente dimostra il contrario la Prefazione ad essi, nella quale si parla di rettificare ciò che Apollonio Pergeo, il qual visse dopo di Euclide, aveva scritto sul paragon del dodecaedro all' icosaedro iscritto in una stessa sfera; e poi la loro esposizione mostra evidenmente a chi ha un poco il gusto Euclideo, ch' essi siano sortiti da altra mano meno perita che quella di Euclide.

Intanto nel trovarsi i libri di Solida di Eucli-

de distinti da quelli di Piana per mezzo del VII°, VIII°, IX°, e X° de' quali si è parlato, deve far necessariamente pensare ad ognuno, che tali libri sieno preliminari necessarj alla scienza de' solidi; ed in fatti questa opinione hanno avuta molti sommi Geometri, tra i quali recheremo quí solamente quelle del Clavio e del Gregory. Il primo di questi nell' introduzione da lui premessa al libro VII°, si esprime così: *Hactenus egit Euclides de priori Geometriae parte, ea scilicet quae circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, et incommensurabilibus dissere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime quae regularia nominantur demonstrandas, atque ut oportet explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis, plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriae theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi* . . . . .
. . . .

Et quia earundem linearum explicatio ac intelligentia cum numeris est implicata, et conjuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur, oportuit eorum numerorum explicationem, ut doctrinae suus ordo, ra-

tioque costaret, lineis anteponi. Nel cominciare poi il libro X° lo stesso Clavio dice: *Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea quae ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas; nunc in hoc X° libro aggreditur ad linearum commensurabilium et incommensurabilium disputationem, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum, complures magnitudines cum solidae, tum planae, neque perfecte intelligi possunt, neque, cum res tulerit in opus atque usum conferri, propterea quod latera earum incommensurabilia sunt: id quod et de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum et haec incommensurabilia saepe numero existant; ut ad finem hujus libri demonstrabimus*. Ed il Gregory nella Prefazione al suo bellissimo Euclide greco-latino stampato in Oxford l' anno 1703, ch' è uno de' più gran monumenti che l' Inghilterra ha innalzati alle scienze, ragiona su di ciò nel seguente modo: *Proprie tamen Geometria haec dividitur in* επιπεδων θεωριαν (*superficierum contemplationem*), *et* στερεομετριαν (*solidorum*). *Sed* στερεομετρια *intelligi nequit sine notitia linearum* συμμετρων, *et* συμμετρων: *nec hanc scire possumus, nisi notitiam habeamus numerorum*. Questi due sommi Geometri, e con essi molti altri, voglion dunque darci chiaramente

ad intendere, che la teoria de' numeri, e quella delle grandezze commensurabili sia essenziale a premettersi all' altra de' solidi; e s' è così ognuno dovrebbe aspettarsi di veder continuamente citate le Proposizioni del VII°, VIII°, IX°, e X° libro nell' XI°, e nel XII°, : e pure se se n'eccettua la prima del libro X°, che serve di lemma alla 5 del XII°, e che anche nel luogo ove si trova vi stà come lemma, non facendo affatto parte delle ricerche del libro X°, non v'ha alcun' altra dimostrazione, o soluzione ne' libri di Solida, che ammetta da lontano l' esistenza dei quattro libri intermedj. E ciò tanto è vero che in nessun Corso moderno di Geometria Elementare Euclidea, non escluso quello del Simson si trovan più questi libri. Inoltre se le teorie d' incommensurabilità e di commensurabilità debbon premettersi a quelle de' solidi; perchè non dovranno ugualmente premettersi alle altre delle figure piane, che pur possono essere commensurabili ed incommensurabili? Ma vi è anche un' altra cosa da osservare ed è questa. Nell' ultima proposizione del lib. X°, come si è già detto, Euclide dopo di aver dimostrato in due modi diversi che la diagonale ed il lato del quadrato sono incommensurabili tra loro, continua a dire così: *Itaque inventis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, ut A, B, invenientur et aliae quamplurimae magnitudines ex duabus dimensio-*

nibus , nimirum superficies incommensurabiles inter se se . Si enim ipsarum A , B , mediam proportionalem sumamus rectam lineam C ; erit ut A ad B , ita figura quae fit ex A ad eam quae ex C similem et similiter descriptam, sive quadrata , sive alia rectilinea similia , sive circuli qui circa diametros A , C describantur ; quandoquidem circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata . Inventa igitur sunt spatia plana inter se incommensurabilia . Ostensis autem his , ostendemus etiam ex solidorum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia et incommensurabilia inter se se . Nam si in quadratis ex A , B , vel in rectilineis quae ipsis aequalia sint solida aeque alta constituamus, sive parallelepipeda, sive piramides , sive prismata,erunt ea inter se uti bases; et si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia , si vero incommensurabiles, et ipsa incommensurabilia erunt. Sed et duobus circulis existentibus A , B , si in ipsis conos aeque altos , sive cylindros constituamus , erunt inter se uti ipsorum bases , hoc est ut A , B circuli , et si quidem circuli commensurabiles sint , commensurabiles erunt et coni inter se se , et cylindri ; si vero incommensurabiles , et coni , et cylindri incommensurabiles erunt . Ex quibus perspicuum est , non solum in lineis et superficiebus esse commensurabilitatem , et incommensura-

bilitatem, *sed et in solidis figuris*. Or chi non vede chiaramente da tutto ciò, che il lib. X° non possa stare innanzi all' XI° e XII°; mentre nel citato luogo di esso vi si accenna pressochè l' intera teoria del rapporto delle figure solide: Il Gregory avendo sostenuto nella Prefazione del suo Euclide, come abbiamo fatto di sopra vedere, che questi libri eran posti nel loro luogo, ha dovuto poi necessariamente ricorrere al ripiego di dire, che le cose quassù rapportate nello Scolio, *o non sono di Euclide*, *o almeno non debbono stare in questo luogo*, *poichè dipendono dalle cose seguenti* (9). Ma senza derogare al rispetto che si deve ad un Geometra del suo merito, egli si è fortemente ingannato. E primieramente non v' ha ragione da dubitare che queste cose sieno di Euclide, quando si ammette che sia sua la Proposizione colla quale sono strettamente connesse: e poi è ben conseguente e ragionevole, ch' Euclide dopo di aver sì a lungo ragionato delle quantità commensurabili, ed incommensurabili, volesse provare con più esempj geometrici l' esistenza di queste tali grandezze, non solamente tra le figure piane, ma anche tra le solide. Il dir poi che quello Scolio non sia nel suo luogo, è manifestamente un assurdo; poichè se ciò fosse vero, qual al-

(9) Si riscontri la notarella da lui inserita a piè della pagina 326 del suo Euclide.

tro luogo potrebbe competerli negli Elementi? Il Gregory dunque si è fatto indurre in equivoco dall'impegno in cui era entrato di sostenere ciò ch' egli aveva asserito nella Prefazione. E quello che si è detto, resterà vieppiù comprovato, allorchè noi in seguito convalideremo con altri argomenti, che non mai Euclide potè interrompere gli Elementi Piani da quelli di Solida coll' intermezzo de'quattro libri de'quali si sta parlando.

Per mostrare la ragionevolezza di questa nostra opinione, basterà ricorrere all' uso che potevano avere questi libri in Geometria. Or è chiaro che gli antichi non dovevano studiar con tanto impegno le cose geometriche per un puro lusso letterario; ma sì bene per l' utilità ch' esse recano agli usi civili, per servirsene cioè in pratica, e ciò vien anche comprovato dall' origine che i più antichi Storici danno a questa scienza (10), e dalla sua stessa denomi-

(10) Quantunque da tempi antichissimi si sien fatte delle costruzioni meccaniche sì ben ordinate, che mostrano chiaramente esservi stato il concorso de' lumi geometrici; purtuttavia bisogna credere, che una tal'epoca ha dovuto precedere di molto quell' altra nella quale questi principj cominciarono ad esser ridotti in regole scientifiche, e che merita di esser chiamata giustamente l' epoca dell'origine della Geometria. L' opinione più ricevuta e più ragionevole si è quella, che molti scrittori antichi, e tra gli altri *Erodoto* ci hanno tramandata, cioè che la Geometria scientifica sia nata in Egitto nel tempo in cui il re *Sesostris*, per consiglio del suo Ministro *Thot*, ordinò che questo regno fosse diviso da moltissimi canali, la quall'ope-

nazione (11). Questi libri adunque dovevano essere senza verun dubbio destinati a ridurre in pratica le teorie geometriche della Piana e della Solida, e ciò vien chiaramente dimostrato dalle teorie che vi si espongono. E se tanto caso si vede in essi fatto della teoria degl'incommensurabili, ciò deve da una parte attribuirsi alla mancanza che avevan gli antichi de' metodi di approssimazione, per cui, prima d'intraprendere un'operazione pratica, dovevano assicurarsi della qualità delle grandezze su cui operavano, e dall' altra al sommo rigore ed esattezza ch'essi mettevano in tutte le loro cose. Che fosse questo l'uso di tali libri lo dice anche il Clavio ne' due luoghi citati.

Or posto ciò, perchè mai un trattato che serviva a ridurre in pratica le teorie di Piana, e di Solida doveva seguire gli Elementi di Piana, e preceder quelli di Solida? Esso avrebbe dovuto certamente seguire, o precedere gli uni e gli altri. Vi è di più, che siccome nel VII° libro si ragiona de' numeri *quadrati*, *e cubi*; e

razione esigendo de' principj geometrici per esser ben eseguita, e per essere in seguito conservata, quel Ministro gettò a questo proposito le fondamenta di una tale scienza. Ecco dunque che la Geometria è figlia del bisogno, e che fin dalla sua infanzia fu la guida dell' uomo nelle pratiche utili sul terreno.

(11) La voce *Geometria* è tradotta dal Greco *γηωμετρια* che componesi dalle due parole *γη* (terra) e *μετρεω* (misurare). Essa dunque altro non significa, che *misura della terra*.

de' primi se ne ha già un' idea di corrispondenza geometrica, l' istessa conveniva formarsene de' secondi. Ed in qual maniera poteva ciò effettuirsi facendo precedere questi libri agli Elementi di Solida? E lo stesso dicasi pe' numeri *piani* e *solidi*.

Da quanto si è detto par che se ne potrebbe conchiudere, che il VII°, VIII°, IX°, e X° libro, anzichè precedere l' XI°, XII°, e XIII°, dovrebbero star dopo questi; ma noi opiniamo, e non senza ragione fortissima, che tali quattro libri non furono da Euclide compresi in un' Opera sola cogli Elementi Geometrici; e che formarono un trattato diverso, il qual s' insegnava a' giovani separatamente, e contemporaneamente agli Elementi di Geometria, appunto come noi costumiamo oggigiorno di accoppiare allo studio di questa scienza quello dell' Aritmetica, e dell' Algebra. Questa nostra opinione è fondata sul seguente ragionamento.

Ciò che deve caratterizzare una buona istituzione elementare di Geometria si è certamente il non trovarci alcuna interruzione nella catena delle verità necessarie, che vi si contengono; senza che però alcuna ve ne sia superflua, o pur due volte esposta; e non v'ha certamente alcuno il quale conosca questa specie di lavori geometrici, che di ciò non convenga. Or se non v' ha dubbio, ch' Euclide abbia conseguita la perfezione ne' suoi Elementi, come

tutt' i Geometri sì antichi, che moderni ne convengono (12), bisogna dire, ch'egli abbia rigorosamente osservato un tal precetto nell' ordinarli. E bene vi si sarebbe del tutto contravenuto da esso, quando si volesse supporre, che il VII° li-

(12) Pappo Alessandrino Geometra del quarto Secolo, che può giustamente aversi come il raccoglitore non solamente di molte cose degli antichi Matematici, ma anche delle loro opinioni, parlando di Euclide, nella Prefazione al VII° libro delle sue Collezioni Matematiche, si esprime nel seguente modo: *adeo excellentem in mathematicis habitum est assecutus, neque usquam deceptus est*. E l' antico Filosofo Proclo, nel suo immenso comentario che intraprese su di Euclide, e che non continuò al di là del libro 1., esclama: *quis non Euclidis Elementa admiretur, in quibus superiorum Elementa omni genere laudis longissime superavit*.

Le opinioni de' moderni in favor degli Elementi di Euclide sono poi tante quante i sommi Geometri; e noi non crediamo fuor di proposito di far qui notare le principali. Incominciando da pietro Ramo, diremo ch' egli sebbene sia stato uno de' più gran critici degli antichi, e di Euclide principalmente, de' cui Elementi si permise il primo di mutarne l' ordine infruttuosamente; pure non potè fare a meno di confessare che: *Nullus paralogismus, nulla pseudographia in totis Elementis Euclidis nobis, quamquam severe inquirentibus animadverti potuit* (Schol. Math. lib. 4. pag. 23.). Il Cardano nella sua Opera *de subtillitate* al lib. 13. dice così, *Euclidis sunt duæ præcipue laudes: inconcussa dogmatum firmitas libri Elementorum, perfectioque adeo absoluta, ut nullum opus huic jure comparare audeas. Quibus fit ut adeo lux veritatis in eo refulgeat, ut ei soli in arduis quæstionibus videantnr verum a falso dignoscere, qui Euclidem habeant familiarem*. Ed il Gregory nella Prefazione al suo Eulide, oltre a tante altre cose ch' egli dice in favor degli Elementi di questo Geometra, ripete un tal passaggio del Cardano.

Il Wolfio inerendo al sentimento del Leibnitz, dopo aver molto lodati gli Elementi di Euclide, soggiugne: *Opus hoc inter*

bro e gli altri sino all' XI° facessero parte degli Elementi di Euclide; imperocchè in quel libro si trovano dimostrate pe' numeri le stesse verità da Euclide fatte rilevare per le grandezze in generale, e quindi anche pe' numeri nel libro V°

---

ea eminet, quæ ex antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ attribuendum sit, quod injuria temporum non interierit. (De præcipuis scrip. math. Cap. 3. §. 2.)

La Scuola Inglese ha sempre pensato favorevolmente di Euclide, che perciò, dice bene il Sig. Montucla » essi veggono » schiudere meno di quelle opere elementari, che non facilitano la scienza se non snervadola, Euclide è quasi il solo » Autore elementare ch' essi conoscano, e non vi mancano perciò Geometri ». Oltre del Gregory che abbiamo già citato, il Barrow, il Keill, e Roberto Simson hanno prodotti con molta esattezza gli Elementi di Euclide. Ed è qui il luogo di ricordare che il Newton, che a giustissimo titolo merita di stare alla testa di questa illustre famiglia di Geometri moderni, soleva dolersi, *quod perlecto non dum Euclide ea diligentia quæ in tanto auctore adhibere debuerat, ad Cartesium, aliosque, propera quadam cura descendisset.*

Il rispetto che ha avuto per gli Elementi di Euclide l' Italia lo mostra evidentemeute la folla de' Comentatori, editori, e traduttori ch'essa ha avuti, tra i quali meritano maggior distinzione il Commandini che tradusse gli Elementi dal Greco in Latino, e gli corredò di Scolj brevi e giudiziosi, il Viviani ed il Borelli.

Finalmente anche in Francia, ove da Pietro Ramo in poi si è sempre avuto il sistema di travestire Euclide, ha però questo Geometra incontrati presso i migliori Matematici di tal nazione di coloro che gli hanno resa giustizia; leggasi a tal proposito ciò che dice il Montucla all' Articolo di Euclide nella sua dotta Storia delle Matematiche Part. 1. Lib. IV: ed anche il Bossut nel suo Saggio sulla Storia delle Matematiche non ha potuto fare a meno di dire » Mai libro di Scienza ha avuto » un successo paragonabile, a quello degli Elementi di Eucli-

In fatti qual necessità v' era di dimostrare, che *se un numero sta ad un altro, come una parte del primo ad una parte del secondo, stia pure il rimanente del primo al rimanente del secondo, come quel numero a questo*, se ció contenevasi nella Prop. 5. del libro V°; che *se quattro numeri sono proporzionali, permutando sono anche proporzionali*, la qual verità vien dimostrata generalmente nella 16 del libro citato. In una parola le Proposizioni 11, 12, 13, 14, e 22 del libro VII° non sono che ripetizioni particolarizzate delle altre 19,12,16, 22,23 del libro V°.

Si potrebbe anche provare facilmente, che negli altri libri, e principalmente nel X° ci sieno delle altre verità, che affatto non avrebbero dovuto dimostrarsi in questo libro, se esso avesse formata una continuazione di teorie col libro VI°

Ma concediamo anche che convenga dimo-

» de. Essi sono stati insegnati esclusivamente per più secoli in » tutte le Scuole di Matematica, trodotti e comentati in tutte » le lingue, prova certa della loro eccellenza » E l'insigne Sig. la Grange, ed il Delambre in un loro rapporto alla Classe di Matematica dell' Istituto di Francia sulla versione dell' Euclide fatta da Peyrard si esprimon così » Poche opere sono sta- » così spesso comentate e prodotte, come gli Elementi di Eu- » clide; ma non v' è autore col quale i suoi traduttori si ab- » biano prese delle si strane libertà »: e poco dopo soggiungono; » ma malgrado tutte le loro cure, e le loro pretensioni, es- » si non hanno fatto obbliare il vero Euclide ». Dopo tutte queste testimonianze di uomini sommi, alle quali se ne potrebbero aggiugnere moltissime altre, sarebbe strano il trovar Euclide inconseguente!

strar nuovamente i casi particolari di una teoria generalmente esposta, quando specialmente si tratta di essa: e bene Euclide il quale ha posto tanto sistema, ed uniformità nelle sue cose, come mai avrebbe fatta questa eccezione per la teoria de' numeri, che non entrava che accidentalmente nel piano de' suoi Elementi, ed avrebbe poi tralasciato di ciò fare per le grandezze continue nel libro VI°. Se si vuol dunque riconoscere in Euclide il carattere di esattezza ch' è chiaramente marcato in tutte le sue cose, e se non si vuol distruggere male a proposito l'opinione di tutti i Geometri antichi, e moderni a suo riguardo, bisogna convenire, che senz' altro questi quattro libri formavano, come noi abbiamo detto, un' opera separata interamente dagli Elementi di Geometria, e che s'insegnava forse nelle Scuole Greche contemporaneamente ad essi. Ciò posto questi tali libri non solamente non debbono esser compresi nell'ordinaria istituzione; poichè, per le teorie che contengono, sono superflui per noi che possediamo l' Aritmetica volgare, e la speciosa; ma senza di questo nè anche vi dovrebbero esser compresi, per le ragioni poc' anzi dette,

Adunque l'XI°, XII°, e XIII° libro non sono a rigore, che il VII°, VIII°, e IX° degli Elementi di Euclide, che forse da Teone Alessandrino, o pur da altro antico espositore furon

trasportati nel luogo ove si trovano, ed intermezzati da libri non di Geometria. Noi intanto continueremo a nominarli XI°, XII°, e XIII°, essendosi quest' uso inveterato, e trovandosi essi così citati da tutti.

NOTA ALLA PAG. 18.

Da' libri di Solida di cui si parla in questa pagina ne abbiamo escluso il XIII°, per le ragioni addette di sopra. E' vero che in questo si trova fatta una certa applicazione delle teorie del lib. X°; ma le cose che hanno bisogno di un tal ajuto non formano l' esenziale delle ricerche del libro XIII°: e poi quest' applicazione, ed in questo luogo non si oppone affatto all' opinione che noi ci abbiamo formata de' libri VII°, VIII°, IX°, e X°, e che qui appresso indicheremo,

L' UNDECIMO LIBRO
DEGLI
ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Il *solido* è ciò, che ha lunghezza, larghezza, e profondità.

II. Il termine del solido è la superficie.

III. Una linea retta è *perpendicolare* ad un piano, quando forma angoli retti con tutte le linee rette, che sono nel sottoposto piano, e la toccano.

IV. Un piano *è perpendicolare* ad un altro, quando ciascuna linea retta, che si conduce in uno di essi perpendicolare alla comune sezione loro, è anche perpendicolare all' altro piano.

V. Se da un qualunque punto di una linea retta inclinata ad un piano si abbassi su questo la perpendicolare, e poi si uniscano gli estremi dell' inclinata, e della perpendicolare, che sono nel piano; l' angolo acuto compreso da questa congiungente, e dall' inclinata stessa si dirà *inclinazione* di tal linea retta al piano.

VI. L' *inclinazione* di un piano ad un altro è quell' angolo acuto, ch' è compreso da due perpendicolari alla comune sezione de' piani, elevatele da uno

stesso punto di essa, una in un piano, e l'altra nell' altro.

vii. Se sono uguali gli angoli d' inclinazione di due piani a due altri, quelli si dicono *similmente inclinati* a questi.

viii. Piani *paralleli* sono quelli, che tra loro non possono mai convenire.

ix. L' *angolo solido* è quell' inclinazione, che si costituisce ad un punto sublime da più linee rette, che da questo si tirano agli angoli di un rettilineo sottoposto.

x. Figure solide simili sono quelle, che hanno i loro angoli solidi rispettivamente uguali, e che sono contenute da piani simili, ed uguali in numero.

xi. Si è tralasciata (*Veggasi la* NOTA ad essa).

xii. Se i vertici degli angoli di un poligono si congiungano con un punto sublime; il solido racchiuso dagli emergenti triangoli, e dal sottoposto poligono, si dirà *piramide*.

xiii. Il *prisma* è una figura solida compresa da piani, de' quali due, che sono sempre opposti, sono paralleli, uguali e simili; ed i rimanenti sono parallelogrammi.

xiv. La *sfera* è quella figura descritta da un semicerchio, il qual si rivolga intorno al suo diametro fisso, finchè ritorni al luogo dove cominciò il suo moto.

xv. Questo diametro fisso dicesi *asse* della sfera.

xvi. Ed il centro del semicerchio è anche centro della sfera.

xvii. È poi *diametro* della sfera ogni linea retta, che passando per lo centro di essa, si arre-

sta da ambe le parti alla superficie sferica.

XVIII. Il *cono* è la figura descritta da un triangolo rettangolo, il qual si rivolga intorno ad un lato immobile, che comprende l'angolo retto, finchè ritorni nel luogo donde cominciò il suo moto.

XIX. Questo lato immobile intorno al quale si rivolge il triangolo, chiamasi *asse* del cono.

XX. La *base* del cono è poi quel cerchio, che si descrive dall'altro lato, ch'è intorno all'angolo retto.

XXI. Il *cilindro* è la figura descritta da un parallelogrammo rettangolo, il qual si rivolga intorno ad un suo lato immobile, finchè ritorni donde aveva cominciato a muoversi.

N. B. Per questa defin., e per la XVIII., veggasi la NOTA ad esse.

XXII. Questo lato immobile intorno al quale si rivolge il rettangolo, si dice *asse* del cilindro.

XXIII. E si chiama *base* ciascuno de' due cerchi che si descrive dai lati opposti, che sono ad angolo coll' asse.

XXIV. Coni *simili*, e cilindri *simili* sono quelli, i cui assi sono proporzionali ai diametri delle basi.

XXV. Il *cubo* è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il *tetraedo* è una figura solida compresa da quattro triangoli equilateri uguali.

XXVII. L' *ottaedro* è una figura solida contenuta da otto triangoli equilateri uguali.

XXXVIII. Il *dodecaedro* è una figura solida contenuta da dodici pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L' *icosaedro* è una figura solida compresa da venti triangoli equilateri uguali.

*

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Una linea retta non può avere una qualche sua parte in un piano, ed un' altra in sublime.

fig. 1. Se ciò può succedere, la linea retta ABC abbia la sua parte qualunque AB nel piano LM, e l'altra BC in sublime. Vi dovrà certamente essere nel piano LM una linea retta per dritto colla AB: sia questa la BD. Adunque le due linee rette ABC, ABD avrebbero comune il segmento AB; la qual cosa non può succedere *.

* c.13.I.

Quindi una linea retta non può avere, ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Tre punti, che non stieno per dritto, sono in un medesimo piano. E due linee rette, che s' intersegano consistono anche in un piano.

fig. 2. Sieno i tre punti E, C, B, i quali non stieno per dritto: dico ch' essi sieno in un medesimo piano.

Si uniscano due di essi E, B per la EB, e s' intenda per questa passare un piano, il quale si concepisca poi rivolgersi intorno ad EB; dovrà un tal piano necessariamente passare per lo

punto C; e perciò i tre punti E, C, B consistono in un piano. Laonde anche le linee rette EC, EB che congiungono questi punti consisteranno nel piano stesso. Ma nel piano in cui sono le CE, EB vi stanno anche le ED, AE *: dunque le linee rette CD, AB, che s' intersegano sono anche in uno stesso piano. * 1. XI.

E perciò tre punti ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

La comune sezione di due piani, che s' intersegano è una linea retta.

S' interseghino i due piani AK, LM: dico che la loro comune sezione sia una linea retta. *fig.* 3.

Imperocchè presi i punti B, e D in questa comune sezione; è chiaro, che se congiungasi la linea retta BD, questa unendo due punti, che esistono in ciascuno di essi piani, debba cadere nel tempo stesso sì nell' uno, che nell' altro; e che perciò debba essere la loro comune sezione.

Laonde la comune sezione ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta è perpendicolare a due altre che s' intersegano, nel punto della loro intersezione; sarà anche perpendicolare a quel piano che passa per esse.

fig. 4. Sieno AB, CD due linee rette che s' intersegano in E, e la FE sia perpendicolare ad esse in questo punto E: dico che una tal linea retta FE debba essere anche perpendicolare al piano LM, che passa per le AB, CD.

Prendansi nelle AB, CD le EA, EC, EB, ED uguali tra loro; poi per E si tiri comunque la linea retta GEH, e si congiungano le DA, BC: finalmente preso un qualsivoglia punto F nella EF, si uniscano le FA, FC, FB, FD.

E poichè le due linee rette AE, ED sono uguali alle due altre CE, EB, e contengono angoli uguali; sarà anche la base AD uguale alla base BC, e l' angolo DAE uguale all'angolo EBC. Ma è pure l' angolo AEG uguale all'angolo BEH; dunque i due triangoli AEG, BEH avendo due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed uguali anche i lati AE, EB, che sottendono angoli uguali; avranno i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati: per lo che sarà GE uguale ad EH, ed AG a BH. Or essendo AE uguale ad EB, ed FE comune, e perpendicolare ad esse; sarà la

base FA uguale alla base FB : e nel modo stesso si dimostrerà essere FD uguale ad FC. Adunque i due triangoli DFA, CFB avendo i lati DF, FA uguali ai lati CF, FB, ciascuno a ciascuno, e la base AD uguale alla base BC; avranno l' angolo FAD uguale all' angolo FBC: e quindi i due altri triangoli FAG, FBH, avendo pur essi i lati FA, AG uguali ai lati FB, BH, e l' angolo FAG uguale all' angolo FBH, come si è dimostrato; avranno la base FG uguale alla base FH. Finalmente i due triangoli FEG, FEH avendo il lato GE uguale al lato EH, il lato EF comune, e la base FG uguale alla base FH; avranno l' angolo FEG uguale all'angolo FEH: e perciò FE sarà perpendicolare alla linea retta GEH. Similmente si dimostra, che FE sia perpendicolare ad ogn'altra linea retta tirata per E nel sottoposto piano: quindi dovrà tal linea retta FE esser perpendicolare al piano nel quale giacciono le AB, DC * C. B. D. * d. 3.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se quattro linee rette partono da un medesimo punto, ed una di esse è perpendicolare a ciascuna delle tre altre; queste tre consisteranno in un piano.

Dal punto A partano le quattro linee rette BA BC, BD, BE, ed una di esse BA sia perpendicolare alle altre tre BC, BD, BE: dico che que- *fig.* 5.

ste tre linee rette debbano consistere in un piano.

Poichè se è possibile, una di esse BC non consista colle altre due in un piano; ma il piano ABF, che passa per BC, e per BA intersighi il piano LM, in cui giacciono le altre due BD, BE; lo dovrà intersegare in una linea
* 3. XI. retta*, che sia BF. E poichè AB è perpendicolare a ciascuna delle due BD, BE, dovrà essere anche perpendicolare al piano LM, che passa per
* 4. XI. esse*; e quindi alla BF, che giace in questo pia-
* d. 3. no*. Dunque è retto l'angolo ABF: ma si è supposto esser anche retto l'angolo ABC; quindi l'angolo ABF è uguale all'angolo ABC. La qual cosa è impossibile; mentre essi esistono in un medesimo piano. E perciò le tre linee rette BC, BD, BE dovranno consistere in un piano. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno perpendicolari ad un piano stesso, saranno parallele tra loro.

fig. 6. Sieno AB, CD due linee rette perpendicolari allo stesso piano LM: dico ch' esse sieno parallele tra loro.

Imperocchè incontrino il piano LM ne' punti B, D, che si uniscano colla BD, sulla quale si elevi da D, e nel piano LM, la perpendicolare DE, e tagliate le BA, DE uguali, si congiungano le BE, AD, AE.

E poichè ne' triangoli ABD, BDE sono uguali i lati AB, DE, l' altro BD è comune, e l' angolo ABD è retto, al pari dell' altro BDE; mentre AB si è supposta perpendicolare al piano LM * : sarà BE uguale ad AD; e perciò i due altri triangoli ABE, ADE avendo i lati AB, BE uguali agli altri lati DE, DA, ciascuno a ciascuno, e la base AE comune, avranno gli angoli ABE, ADE uguali; e 'l secondo di questi sarà retto al pari del primo. Dunque la linea retta ED, che per costruzione era perpendicolare alla DB, e per ipotesi alla DC, lo è anche alla DA; e perciò queste tre linee consisteranno in un piano *. Ma nel piano delle BD, DA è *puro BA; poichè consistendo i tre punti A, B, D in un piano *; le tre linee rette AB, BD, DA, che gli uniscono, dovranno giacere in un tal piano. Laonde sulle linee rette BA, DC esistenti in un piano stesso, cadendovi la BD, e formando gli angoli interiori ABD, BDC retti, esse BA, DC saranno parallele.

* d. 3.
* 5. XI.
* 2. XI.

E perciò se due linee rette, ec. C. B. D.

N. B. La Prop. VII. si è tralasciata. (*Veggasi la* NOTA *su di essa*)

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno parallele, ed una di esse sia perpendicolare ad un piano, anche l' altra sarà perpendicolare al piano stesso.

Le due linee rette AB, CD sieno parallele, ed fig. 6.

AB sia perpendicolare al piano LM: dico che anche CD debba esser perpendicolare allo stesso piano.

Si uniscano i punti B, D, ove le AB, CD incontrano il piano LM, cadrà la BD nel piano delle parallele AB, CD; e perciò saranno le AB, CD, BD in un solo piano: indi dal punto D si tiri DE perpendicolare a DB, e nel piano LM; si ponga DE uguale ad AB, e si uniscano le BE, AE, AD. E poichè AB è perpendicolare al piano LM, dovrà esser perpendicolare sì alla BD, che alla BE, che sono in questo piano, e la toc-
* d. 3. cano in B *; e perciò ciascuno degli angoli ABD, ABE è retto. Or essendo AB uguale a DE, e BD comune; saranno le due AB, BD uguali alle due ED, DB, ciascuna a ciascuna: ma è anche l' angolo ABD uguale all' angolo EDB, perchè ciascuno di essi è retto; quindi la base AD è uguale alla base BE. Similmente essendo AB uguale a DE, e BE ad AD, saranno le due AB, BE uguali alle due ED, DA; è poi la base AE comune; dunque sarà l'angolo ABE uguale all' altro EDA. Laonde essendo retto ABE, sarà anche EDA retto; e quindi ED è perpendicolare a DA. Ma ED è anche perpendicolare a DB; dovrà perciò ED essere per-
* 4. XI. pendicolare al piano che passa per le BD, DA*, e
* d. 3. quindi a DB, che si trova in questo piano *; poichè tutte tre le BD, DA, DC sono nel piano nel quale esistono le parallele AB, CD: dunque l' angolo CDE è retto. Ma è anche retto l'altro CDB. Quindi CD essendo perpendicolare alle due DB, DE nel punto D ove s' intersegano;

sarà anche perpendicolare al piano LM che passa per esse *. * 4. XI.

E perciò se una linea retta ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Due linee rette che sono parallele ad una terza, sono anche parallele tra loro, ancorchè non stieno in un medesimo piano.

Sia ciascuna delle linee rette AB, CD parallela ad EF, e non stieno esse tre linee rette nel piano stesso: dico che AB sia parallela a CD. *fig.* 7.

Imperocchè si prenda nella EF un qualsivoglia punto G, dal quale si tirino ad essa EF le due perpendicolari GH, GK, la prima nel piano delle parallele EF, AB, l' altra in quello delle altre parallele EF, CD. E poichè EF è perpendicolare alle due GH, GK, sarà anche perpendicolare al piano in cui queste consistono *; e ciascuna delle altre linee rette AB, CD, perchè parallela alla EF, dovrà esser perpendicolare al piano stesso *: quindi le AB, CD saranno tra loro parallele. * 4. XI. * 8. XI.

Laonde due linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se i lati di un angolo, ch'è in un piano, sieno rispettivamente paralleli ai lati di un altro angolo, che si trova in un piano diverso; cotesti angoli saranno uguali.

fig. 8. I lati dell'angolo BAC, che è in un piano sieno rispettivamente paralleli ai lati dell' altro angolo EDF, che sta in un altro piano, cioè AB a DE, ed AC a DF: dico che l' angolo BAC sia uguale all' altro EDF.

Imperocchè si prendano ne' lati di uno degli angoli BAC due punti B, C ad arbitrio; e poi si taglino dai lati dell' altro angolo EDF le parti DE, DF uguali rispettivamente alle AB, AC, e si uniscano le AD, BE, CF, BC, EF. E poichè BA è uguale, e parallela a DE, sarà anche AD uguale, e parallela a BE. Per la stessa ragione anche CF è uguale, e parallela ad AD: quin-
* 9. XI. di CF è uguale, e parallela a BE *. Laonde anche uguali, e parallele saranno le BC, EF, che congiungono gli estremi di quelle: e perciò i due triangoli BAC, EDF, che per costruzione hanno uguali rispettivamente i lati intorno agli angoli in A, ed in D, hanno per dimostrazione basi uguali; quindi l' angolo in A dovrà essere uguale all' altro in D.

Adunque se i lati di un angolo ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Tirare da un punto dato in sublime una perpendicolare sopra un piano dato.

Sia dato il punto A in sublime, e sia poi dato il sottoposto piano LM; fa d' uopo tirare dal punto A una perpendicolare al piano LM. *fig. 9.*

Si tiri nel dato piano LM una linea retta BC, sulla quale si abbassi dal dato punto A la perpendicolare AD *; se questa sarà anche perpendicolare al sottoposto piano LM, si sarà fatto quello, che si cercava. Che se poi non lo sia; dal punto D si elevi sulla BC, e nel piano LM, la perpendicolare DF *, e su di questa si abbassi dal punto A la perpendicolare AF; sarà tal linea retta la perpendicolare al piano LM. * 12. I. * 11. I.

Per F si tiri FE parallela a BC. Ed essendo retti i due angoli BDF, BDA; sarà BD perpendicolare al piano, che passa per le DF, DA, al quale sarà anche perpendicolare la EF, ch'è parallela alla BD *: dunque l'angolo AFE è retto. Ma è anche retto l' altro AFD: quindi AF è perpencolare alle due FE, FD nel punto F della loro intersezione, e perciò è anche perpendicolare al piano LM in cui queste consistono *. Adunque essa è la perpendicolare che doveasi abbassare dal dato punto A sul piano LM. * 8. XI. * 4. XI.

Quindi da un dato punto ec. C. B. F.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Tirare una linea retta perpendicolare ad un piano da un punto dato in esso.

fig. 10. Sia A il punto dato nel piano LM: fa d' uopo da questo punto A elevare una perpendicolare sul piano LM.

Si concepisca un altro punto B sublime, dal quale si abbassi sul piano LM la perpendicolare
* 11. XI. BC *, ed a questa si tiri per A la parallela AD, che sarà perpendicolare al piano LM, al pari
* 6. XI. dell' altra BC *.

E perciò si è tirata una linea retta ec. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Da uno stesso punto non si possono elevare sopra un piano, e dalla medesima parte di esso, due perpendicolari.

fig. 11. S' è possibile sieno BA, AC due perpendicolari elevate sul piano LM dallo stesso punto A, e dalla medesima parte di esso. Si tiri per queste un piano, la cui comune sezione coll' altro LM
* 3. XI. sia la linea retta DE *.

Ed essendo sì BA, che CA perpendicolare a

piano LM, sarà retto ciascuno degli angoli BAE, CAE; e quindi l' un di essi uguale all' altro: il maggiore al minore: il che è impossibile. E perciò è impossibile di elevare dallo stesso punto A due perpendicolari sul piano LM, dalla medesima parte di esso. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se una stessa linea retta è perpendicolare a due piani; questi saranno paralleli tra loro.

Sia la stessa linea retta AB perpendicolare sì al piano EF, che all' altro CD: dico che questi piani sieno paralleli tra loro. *fig.* 12.

Poichè se non sono paralleli, prodotti per un verso converranno: si producano, e convengano nella linea retta HG; e preso in questa un qualsivoglia punto K, si tirino da esso ai punti A, B le AK, BK, che esisteranno, com' è chiaro, rispettivamente ne' piani EFHG, CDHG, e costituiranno colla AB un triangolo. Or la AB, essendo perpendicolare ai piani DC, FE, lo deve essere anche alle linee rette AK, BK, che sono tirate in essi; e perciò gli angoli KAB, KBA sono retti. Adunque il triangolo AKB avrebbe due angoli retti: il che è impossibile. E perciò i piani EF, CD non possono convenire, e sono per conseguenza paralleli.

Laonde se una linea retta ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se in un piano vi sia un angolo rettilineo, che abbia i lati paralleli a quelli di un altro angolo rettilineo, ch' è in un piano diverso; essi piani saranno anche paralleli.

fig. 13. Nel piano LM vi sia l' angolo ABC, i cui lati AB, BC sieno rispettivamente paralleli ai lati DE, EF dell' altro angolo DEF, ch' è nel piano PQ: dico che i piani LM, PQ sieno paralleli.

Dal vertice B dell' angolo ABC si abbassi sul piano PQ, dove sta l' altro angolo DEF, la perpendicolare BG, e per G si tirino le GH, GK parallele rispettivamente alle ED, EF.

E poichè BA è parallela ad ED per supposizione, ed ED è parallela a GH; dovrà BA esser parallela a GH *. Per lo che essendo BG perpendicolare al piano PQ, e perciò retto l' angolo BGH, sarà anche retto l' altro GBA. E dimostrandosi in simil modo, che sia retto l' angolo GBC, sarà la linea retta FG perpendicolare alle due BA, BC nel punto B della loro intersezione, e per conseguenza al piano LM, in cui queste esistono *. Ma una tal linea retta è per costruzione perpendicolare al piano PQ; quindi questi due piani saranno paralleli *.

* 9. XI.

* 4. XI.

* 14. XI.

Per la qual cosa se in un piano ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se due piani paralleli sieno segati da un terzo piano; le intersezioni di questo con ciascuno di quelli saranno parallele.

I due piani paralleli AB, CD sieno segati dal terzo EFGH: dico che le comuni sezioni EF, GH di questo piano con ciascuno di quelli sieno anche parallele. *fig.* 14.

Imperocchè se le EF, GH non sono parallele, prolungate da una delle due parti converranno. Si prolunghino dalla parte FH, e convengano in K. E poichè la linea retta GHK è nel piano AB; dovrà il punto K esistere in questo stesso piano prolungato: e per la stessa ragione un tal punto dovrà anche trovarsi nel piano CD prolungato. Laonde i piani AB, CD, se si prolunghino, converranno. Ma non possono convenire, poichè paralleli. Dunque nè pure potranno incontrarsi le linee rette EF, GH dalla parte FH. Così pure si dimostra, che non possono incontrarsi dall' altra parte EG: perciò le due linee rette EF, GH, ch' esistono nello stesso piano EFHG, e che non possono incontrarsi, se si prolunghino dall' una parte, o dell' altra, saranno parallele.

Adunque se due piani paralleli ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno segate da piani paralleli, saranno da questi proporzionalmente divise.

fig. 15. Le due linee rette AB, CD sieno segate dai piani paralleli GH, KL, MN nei punti B, E, A; D, F, C: dico che come la linea retta AE all' altra EB, così stia CF ad FD.

Imperocchè si uniscano le AC, BD, CB, e questa CB incontri il piano KL nel punto X, dal quale si tirino ai punti E, ed F le EX, XF. E poichè i due piani paralleli MN, KL sono segati dal piano BAC, le intersezioni AC, EX di
* 16.XI. questo con quelli, saranno parallele *; e perciò, essendosi condotta la parallela EX al lato AC del triangolo ABC, dovrà stare BE ad EA, come BX ad XC: e dimostrando similmente, che stia BX ad XC, come DF ad FC, per essersi tirata nell' altro triangolo BCD la XF parallela alla BD; sarà BE ad EA, come DF ad FC.

Adunque se due linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia perpendicolare ad un piano; ogni altro piano, che passa per essa, sarà

anche perpendicolare a quello stesso piano.

La linea retta AB sia perpendicolare al sottoposto piano LE: dico che ogni altro piano, che passa per la AB, sia perpendicolare al piano LE. *fig.* 16.

Imperocchè si faccia passare per la AB il piano CH, e sia CE la comune sezione di questo piano col sottoposto LE; indi si prenda nella CE un qualunque punto F, dal quale si tiri nel piano CH la FG perdendicolare alla CE. E poichè BA è perpendicolare al piano LE, sarà perpendicolare alla linea retta CE che esiste in un tal piano *; dunque l'angolo BAF è retto: ma è anche retto l'altro GFA; quindi la AB è parallela alla FG. Per lo che essendo AB perpendicolare al piano LE; sarà anche FG perpendicolare ad un tal piano *. Ma un piano è perpendicolare ad un'altro, allorchè ciascuna linea retta, che si tira in uno di essi piani perpendicolarmente alla comune sezione loro, è anche perpendicolare all'altro piano *: ed essendosi tirata da F nel piano CH la FG perpendicolare alla comune sezione CE, si è dimostrato che questa è anche perpendicolare al piano EL; adunque il piano CH, che si è supposto passare ad arbitrio per la AB, è perpendicolare all'altro EL. * d.3.XI * 8. XI

E quindi se una linea ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se due piani che s' intersegano sono perpendicolari ad un altro piano; la loro comune sezione sarà anche perpendicolare a questo stesso piano.

fig. 17. Sieno AB, CB due piani, che s' intersegano, ciascun de' quali è perpendicolare al piano AC; e sia BD la loro intersezione: dico che questa BD del ba essere anche perpendicolare al piano AC.

Poichè se non lo è, non potrà nè pure esser perpendicolare all' una, o all' altra delle linee rette DA, DC che sono nel piano CA, e la toc-
* 4.XI. cano in D *; e perciò si potranno da un tal punto tirar due linee rette, una DE nel piano BA, la quale sia perpendicolare ad AD, e l' altra DF nel piano BC, che sia perpendicolare a DC. E poichè nel piano AB, ch' è perpendicolare all' altro AC, si è tirata DE perpendicolare alla AD comune sezione di essi piani; sarà
* d.4.XI. DE perpendicolare al sottoposto piano AC *: e similmente si dimostra, che anche DF è perpendicolare allo stesso piano AC. Quindi dal medesimo punto D si sarebbero elevate sul piano AC, e dalla stessa parte, due perpendicolari; il che non
* 13.XI. può essere *. Laonde non si potrà elevare dal punto D al piano AC altra perpendicolare, oltre la DB, ch' è l' intersezione dei piani AB, BC.

E perciò se due piani ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani; due di essi, comunque presi, sono maggiori del terzo.

L' angolo solido in A sia contenuto dai tre angoli piani BAC, CAD, DAB: dico che due di questi angoli, comunque presi, sieno maggiori del terzo. *fig.* 18.

Imperocchè se i tre angoli BAC, CAD, DAB sono uguali, è manifesto che due, comunque presi, sieno maggiori del terzo. Ma se non è così, ve ne sarà uno BAC non minore di ciascuno dei rimanenti; ma però maggiore di un di essi DAB; e perciò si costituisca alla linea retta AB, al punto A in essa, e nel piano dell'angolo BAC l'angolo BAE uguale all' altro BAD; poi pongasi AE uguale ad AD, e tirata per E la BEC, che incontri le AB, AC nei punti B, C, si uniscano le BD, DC. E poichè DA è uguale ad AE, ed AB è comune; perciò sono le due DA, AB uguali alle due EA, AB; è pure l' angolo DAB uguale all' angolo EAB: dunque la base BD è uguale alla base BE. Laonde essendo le due BD, DC maggiori di BC, e DB uguale a BE; dovrà la rimanente DC esser maggiore della rimanente CE. Or poichè DA è uguale ad AE, AC è comune, e la base DC è maggiore della base EC; sarà l'angolo DAC maggiore dell' altro EAC. Ma per

costruzione l' angolo DAB è uguale all' altro BAE; quindi gli angoli DAB, DAC, insieme presi, sono maggiori dell' angolo BAC: è poi l' angolo BAC non minore di ciascuno degli altri DAB, DAC; perciò un di questi insieme con BAC dovrà esser maggiore del rimanente.

Per la qual cosa se un angolo solido ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Tutti gli angoli piani, che comprendono un angolo solido, sono minori di quattro retti.

fig. 19. Sia l' angolo solido in A contenuto dagli angoli piani BAC, CAD, DAB: dico che questi sieno minori di quattro retti.

Si concepisca un piano incontrare quegli altri piani ne' quali esistono gli angoli BAC, CAD, DAB, e sieno BC, CD, DB le comuni sezioni di quel piano con questi. E poichè l' angolo solido in B è compreso da tre angoli piani ABD, ABC, CBD; dovranno due qualunque di questi ABD, ABC esser maggiori del terzo CBD: così anche si dimostra, che i due angoli ACD ACB sono maggiori dell' angolo DCB; e che i due ADB, ADC sono maggiori di BDC; dunque i sei angoli ABD, ABC, ACB, ACD, ADC, ADB, insieme presi, sono maggiori dei tre angoli del triangolo BDC, cioè di due retti. Or questi sei angoli insieme co' tre altri, che comprendono

l'angolo solido in A compongono gli angoli de' tre triangoli BAD, DAC, CAB, e fan perciò sei retti; e sono que' sei angoli maggiori di due retti, come si è dimostrato: dovranno dunque quelli che comprendono l'angolo solido in A esser minori di quattro retti. Similmente si dimostrerebbe, che sieno minori di quattro retti gli angoli piani, che comprendono un angolo solido, se essi sieno quattro, o più.

Dunque in generale tutti gli angoli piani ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXII.

LEMMA.

Dal centro di un cerchio sieno tirati quattro raggi, che comprendano tre angoli capaci a costituire un angolo solido, de' quali il primo, ed il terzo sieno acuti; e poi pe' termini dei raggi estremi si conducano al cerchio le tangenti, che incontrino i raggi medj prolungati: si potrà costituire un triangolo dalla congiungente questi punti d'incontro, e da quelle tangenti.

Dal centro A del cerchio BEG sieno tirati quattro raggi AB, AF, AG, AE, che comprendano i tre angoli BAF, FAG, GAE capaci a costituire un angolo solido, dei quali il primo, ed il terzo sieno acuti; e poi dai punti B, E si tirino al cerchio le tangenti BC, ED, e congiungasi la CD: dico che dalle tre linee rette BC, *fig.* 204

CD, DE se ne potrà costituire un triangolo.

Si supponga esser l' angolo BAC quello dei due acuti, che non è minore dell' altro DAE, e dal punto C si tiri al cerchio BEG l' altra tangente C*b*, e si congiunga la *b*A; sarà C*b* uguale a CB, e l' angolo CA*b* uguale all' altro
* 12. IV. CAB *: si unisca D*b*. E perchè due dei tre angoli proposti sono maggiori del terzo; dovrà l'angolo DA*b*, ch' è la differenza dei due DAC, CA*b*, cioè DAC, CAB, esser minore dell' altro DAE; per lo che i due triangoli DAE, DA*b* avendo il lato DA comune, gli altri lati AE, A*b* uguali, e l' angolo DAE maggiore dell'altro DA*b*; avranno la base DE maggiore della base D*b*. E perciò essendo DC e D*b* maggiori di C*b*, o di CB, saranno anche DC e DE maggiori di CB: e similmente dall' essere C*b* e D*b*, o pure CB e D*b*, maggiori di DC, se ne rileva, che CB e DE debbano anche esser maggiori di CD. Finalmente se l' angolo BAC è uguale all' altro EAD, è chiaro che BC sarà uguale ad ED; e perciò che DE sia minore di BC, CD, prese insieme. Che se poi tali angoli si suppongano disuguali, e BAC il maggiore: si costituisca al punto A della linea retta AB l' angolo BA*e* uguale all' altro EAD; è chiaro che la DE, al pari della sua uguale B*e*, debba esser minore della BC; e quindi anche minore delle BC, CD, insieme prese. Adunque dalle tre linee rette BC, CD, DE se ne potrà costituire un triangolo.

E perciò dal centro di un cerchio ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

Costituire un angolo solido con tre angoli piani minori di quattro retti, e tali che due, comunque presi, sieno maggiori del terzo.

Sien dati i tre angoli piani HKL, Q, PRS minori di quattro retti, e tali che due, comunque presi, sieno maggiori del terzo: bisogna costituire con essi un angolo solido. *fig.* 21.

CASO 1. Se almen due degli angoli dati HKL, PRS sono retti; allora dal vertice dell' angolo CAB uguale al terzo angolo Q, si elevi la perpendicolare AD al piano di esso angolo CAB *, e sarà chiaro che questa, e le due AB, AC costituiranno al punto A un angolo solido contenuto da tre angoli piani rispettivamente uguali ai tre dati HKL, Q, e PRS. n. 1. * 12.XI.

CASO 2. Che se due di essi angoli HKL, PRS sieno acuti, e l' altro comunque: allora preso in un piano un punto A, si tirino da questo nel piano stesso le quattro linee rette AB, AC, AD, AE, che comprendano gli angoli BAC, CAD, DAE uguali rispettivamente ai tre dati HKL, Q, e PRS, ed in modo, che il primo BAC, e l'ultimo DAE sieno gli acuti; e poi descritto col centro A intervallo qualunque AB il cerchio BEG, si faccia la stessa costruzione del Lemma precedente: si potrà costituire un triangolo dalle tre linee rette BC, CD, *fig.* 20.

e fig. 21. n. 2. DE ; sia questo il triangolo *bcd* , ed innalzata sul piano di esso , dal vertice del suo angolo compreso dalle *bc* , *bd* , uguali rispettivamente alle BC , DE , la perpendicolare *ba* uguale alla BA , o alla AE , si congiungano le *ac*, *ad* ; sarà l' angolo solido in *a* , ch' è compreso dagli angoli piani *cab* , *bad* , *dac* quello che si cerca .

Imperocchè i due triangoli rettangoli CBA , *cba* avendo rispettivamente uguali i lati intorno agli angoli retti CBA, *cba*, dovranno avere anche uguali le ipotenuse CA , *ca*, e dovrà di più essere l' angolo *cab* uguale all' altro CAB , cioè ad HKL. Similmente si dimostrerà esser DA uguale a *da* , e l' angolo *dab* uguale a DAE , cioè a PRS. Laonde i due triangoli CAD , *cad* avendo i lati rispettivamente uguali, dovranno avere anche l'angolo *cad* uguale all' altro CAD , cioè a Q : e perciò i tre angoli *bac* . *bad* , *cad*, che comprendono l' angolo solido in *a* pareggiano rispettivamente i tre dati .

fig. 21. n. 2. CASO 3. Sieno ora ottusi due degli angoli dati *l*KH , *s*RP . Si prolunghino i lati *l*K , *s*R degli angoli *l*KH , *s*RP in L , ed S , e poi cogli angoli HKL , PRS , che sono acuti , e col terzo angolo Q si costituisca , come nel caso precedente , l'angolo solido in *a* . Indi il lato *ba* di quest' angolo solido , ch' è adjacente ai due angoli *bac*, *bad*, che sono uguali ad HKL , PRS , si prolunghi al di sopra del vertice *a* in *h* ; sarà l'angolo solido cercato quello, che si costituisce al punto *a* dagli angoli *cad* , *cah* , *dah* .

Poichè si vede chiaramente , che essendo i due angoli *bac* , *cah* uguali a due retti , saranno essi

uguali ai due LKH, HK*l*; e che perciò toltine gli uguali *bac*, HKL debba il rimanente angolo HK*l* pareggiare il rimanente *hac*: e similmente si dimostra, che *dah* sia quanto l' altro PR*s*. Ma è poi *cad* uguale al terzo angolo dato Q: dunque l' angolo solido costituito in *a* dai tre angoli piani *cah*, *dah*, *cad* sarà quello, che si cerca.

Caso 4. Finalmente sia l' angolo Q acuto, l' altro HKL retto, ed il terzo PR*s* ottuso. Si prolunghi similmente la *s*R in S; e poi si costituisca l' angolo solido in *a* contenuto dai tre angoli piani *cab* uguale ad HKL, *cad* uguale a Q, e *dab* uguale a PRS *; e si prolunghi il lato *ad* adjacente ai due angoli *cab*, *dab* in *h*; sarà l' angolo solido in *a*, compreso dai tre angoli piani *cah*, *cad*, *dah*, quello che si cerca. Imperocchè essendo l' angolo *cab* retto, sarà il suo conseguente *cah* anche retto; e perciò uguale all' angolo HKL: ed essendo i due angoli *dab*, *dah* uguali a due retti, e quindi uguali ai due *s*RP, PRS; toltine gli angoli uguali *dab*, PRS, resterà l' angolo *dah* uguale all' altro PR*s*. È poi l' angolo *cad* uguale all' angolo Q; quindi il sopraindicato angolo solido in *a* sarà il cercato.

* *cas.* 2.

Laonde si è costituito un angolo solido ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

Se ai vertici di due angoli piani uguali si adattino in sublime due linee rette, le quali compren-

dano angoli uguali coi lati degli angoli proposti, ciascuno a ciascuno: gli angoli solidi, che si verranno in tal modo a costituire in quei punti, saranno uguali.

fig. 22, Sieno i due angoli piani uguali BAC, EDF, ed ai punti A, D si adattino in sublime le linee rette AG, DP, le quali comprendano angoli uguali, ciascuno a ciascuno, coi lati degli angoli proposti, cioè sia l'angolo GAB uguale a PDE, e l'angolo GAC a PDF: dico che gli angoli solidi, che si verranno in tal modo a costituire nei punti A, D sieno uguali.

Si prendano le AH, e DM uguali, e dai punti H, M si abbassino le HK, MN rispettivamente perpendicolari ai piani BAC, EDF: poi si tirino da questi punti K, ed N alle linee rette AB, AC, DE, DF le perpendicolari KB, KC, NE, NF; e finalmente si uniscano le HB, BC, ME, EF. E poichè HK è perpendicolare al piano BAC; sarà anche il piano HBK, che passa per la HK, perpen-
* 18.XI. dicolare allo stesso piano BAC*: ma in questo piano BAC si è tirata la AB perpendicolare alla comune sezione BK dei piani BAC, BHK; perciò AB è
* p.4.XI perpendicolare al piano HBK *, e quindi alla
* d.3.XI BH, che giace in questo piano *. Adunque l'angolo ABH è retto: e similmente si dimostra, che sia retto l'angolo DEM. Laonde i due triangoli HAB, MDE avendo uguali gli angoli ABH, DEM, perchè retti; gli altri loro angoli HAB, MDE essendo pure uguali per supposizione, e pareggiandosi anche i loro lati AH, DM; do-

vrà essere AB uguale DE. E similmente, se congiungansi le HC, MF, si dimostrerà che AC sia uguale a DF. Or essendo AB uguale a DE, ed AC a DF; saranno le due BA, AC uguali alle due DE, DF, ciascuna a ciascuna; di più queste linee rette uguali comprendono gli angoli uguali BAC, EDF; sarà perciò BC uguale ad EF, e l'angolo ABC uguale all'angolo DEF. Ma era l'angolo retto ABK uguale all'angolo retto DEN; quindi il rimanente angolo CBK sarà uguale al rimanente FEN: e così pure si dimostra, che l'angolo BCK sia uguale all'altro EFN. Per lo che i due triangoli BCK, EFN avendo due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed il lato BC uguale all'altro EF; avranno anche il lato BK uguale al lato EN: è poi AB uguale a DE; perciò le due AB, BK sono uguali alle altre due DE, EN, e comprendono angoli retti; dunque AK sarà uguale a DN. Ciò posto il quadrato di AH è uguale ai quadrati di AK, KH, perchè l'angolo AKH è retto; e similmente il quadrato di DM pareggia quelli di DN, NM: sono poi uguali non solamente i quadrati di AH, e di DM, ma anche gli altri di AK, e di DN; dunque dovrà il quadrato di HK pareggiar quello di MN; e perciò HK essere uguale ad MN.

Or se si concepisca applicarsi l'angolo solido in A all'altro in B in modo, che l'angolo BAC combaci col suo uguale EDF, cadranno i punti B, C, ne' punti E, F; e quindi l'angolo ABK combacerà coll'angolo DEN, perchè l'uno, e l'altro è retto; e l'angolo ACK coll'angolo DFN, per la

stessa ragione: e perciò il punto K cadrà in N, e le KH, NM, come perpendicolari ai piani BAC, EDF, che coincidono, dovranno pur cadere l'una nell'altra, e quindi essendo esse uguali, cadrà il punto H nel punto M, e la HA combacerà colla MD. Adunque i due angoli solidi in A, ed in D combaceranno anch' essi, e perciò saranno uguali.

Cor. Da ciò si rileva, che se gli angoli solidi in A, ed in D sieno contenuti ciascuno da tre angoli piani, i quali sieno rispettivamente uguali, e similmente posti, cioè l'angolo BAC uguale all' angolo EDF, l' angolo BAG uguale all' angolo EDP, e l'angolo GAC all'angolo PDF; e che in due loro lati corrispondenti AG, DP si prendano le parti uguali AH, DM, donde si abbassino ai piani in cui esistono gli angoli opposti ad essi lati, le perpendicolari HK, MN; *queste saranno uguali*; e se congiungansi le AK, DN *l' angolo HAK pareggerà l'angolo MDN.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Le figure solide contenute dallo stesso numero di piani simili, uguali, e similmente posti, e delle quali ciascun angolo solido non sia compreso da più di tre angoli piani, sono uguali, e simili tra' loro.

fig. 23. Sieno le figure solide AG, KQ contenute dallo stesso numero di piani simili, uguali, e similmente posti; cioè sia il piano AC uguale e simile al piano KM, il piano AF a KP, BG ad

LQ, GD a QN, DE ad NO, e finalmente FH a PR; e che di più ciascun loro angolo solido non costi di più di tre angoli piani: dico che la figura solida AG sia uguale, e simile all' altra KQ.

Poichè ai vertici A, e K degli angoli piani uguali BAE, LKO si sono adattate in sublime le linee rette AD, KN, le quali comprendono co' lati degli angoli proposti uguali angoli, ciascuno a ciascuno, cioè l' angolo EAD all' angolo OKN, e l' altro DAB uguale ad NKL; sarà l' angolo solido in A uguale a quello in K * : e similmente si dimostreranno uguali tra loro i rimanenti angoli solidi delle figure proposte. Adunque se la figura solida AG si applichi alla figura solida KQ, in modo, che la linea retta AB combaci colla KL; dovrà la figura piana AC combaciare coll'altra KM, che gli è uguale, e simile: e perciò le linee rette AD, DC, CB combaceranno colle KN, NM, ML; i punti A, D, C, B cadranno ne' punti K, N, M, L; e l' angolo solido in A combacerà coll' angolo solido in K. Laonde il piano AF combacerà col piano KP, e la figura AF colla figura KP, per esser queste uguali, e simili tra di loro. Quindi le linee rette AE, EF, FB combaceranno colle KO, OP, PL; ed i punti E ed F cadranno in O, e P: e similmente si dimostrerà, che la figura AH combaci colla KR; la linea retta DH colla NR; e che il punto H cada in R. Or poichè l' angolo solido in B è uguale a quello in L, si potrà dimostrare nel modo stesso di poc'anzi, che la figura BG combaci colla LQ; la linea retta CG colla MQ; e che il punto G cada in Q. Adunque tutti i piani, e

* A.XI.

tutti i lati della figura solida AG combaciano coi piani, e coi lati dell' altra figura solida KQ; e perciò la figura solida AG sarà uguale, e simile all' altra KQ.

Quindi se due figure solide ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se un solido sia contenuto da piani paralleli, gli opposti tra questi saranno parallelogrammi uguali, e simili.

fig. 24. Il solido BGEC sia contenuto dai piani paralleli AC, GF; BG, CE; BF, AE: dico che i suoi piani opposti sieno parallelogrammi uguali, e simili.

Poichè i due piani paralleli BG, CE sono segati dal piano AC; saranno anche parallele le loro comuni sezioni AB, CD *. Similmente essendo paralleli i piani BF, AE, le intersezioni loro BC, AD col piano AC dovran pure essere parallele; quindi la figura quadrilatera ABCD è un parallelogrammo. E nel modo stesso si dimostrerà, ch' è un parallelogrammo ciascuna delle altre figure AH, HE, EC, DG, CH. Ciò posto si congiungano le AH, DF: e poichè AB è parallela a DC, e BH a CF; i due angoli ABH, DCF avendo paralleli i loro lati, dovranno essere uguali *; e quindi i due triangoli ABH, DCF avendo i lati intorno agli angoli uguali in B, ed in C rispettivamente ugua-

* 16.XI.

* 15.XI.

li; avranno la base AH uguale alla base DF, e sarà pure il triangolo ABH uguale al triangolo DCF. Quindi il doppio del primo triangolo, cioè il parallelogrammo ABHG, sarà uguale e simile all' altro parallelogrammo DCFE, ch' è doppio dell' altro triangolo. Similmente si dimostrerà che il parallelogrammo DB sia uguale e simile all' altro EH, e che CH lo sia a DG.

Dunque se un solido ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se un solido parallelepipedo si seghi con un piano parallelo a' piani opposti; sarà come la base alla base, così il solido al solido.

N. B. Euclide chiama specialmente *parallelepipedo* quel solido ch' è terminato da sei piani, gli opposti de' quali sono paralleli, e che perciò sono parallelogrammi *. * 24. XI.

Sia il solido parallelepipedo ABDC segato dal piano FG parallelo ai piani opposti AR, HD: dico che stia la base AF alla base FH, come il solido ABEF al solido EGDC.

Imperocchè si prolunghi AH dall' una parte e dall' altra, e si pongano uguali alla EH quante si vogliano HM, MN; uguali poi alla EA quante altre si vogliano AK, KL, e si compiscano i parallelogrammi LO, KY, HQ, MS, ed i solidi LP,

KR, HV, MT. E poichè le linee rette LK, KA, AE sono uguali tra di loro, i parallelogrammi LO, KY, AF saranno anche tra di loro uguali. Similmente sono tra loro uguali i parallelogrammi KX, KB, AG; come pure tra loro
* 24.XI. uguali sono gli altri parallelogrammi LZ, KP, AR, che sono opposti *. E similmente si dimostra che non solo sieno tra loro uguali i parallelogrammi EC, HQ, MS; ma che lo sien pure tra loro gli altri parallelogrammi HG, HI, IN; e finalmente che anche i parallelogrammi HD, MV, NT sieno tra loro uguali. Dunque tre piani del solido LP sono uguali e simili a tre piani del solido KR, ed a tre piani del solido AV ciascuno a ciascuno. Ma i rimanenti tre che sono opposti a questi, sono uguali e simili rispettivamente ad essi; e quindi tra loro: e ciascun angolo solido di tali figure solide è contenuto da tre angoli piani. Dunque i tre solidi
* B.XI. LP, KR, AU saranno tra di loro uguali *. Per la stessa ragione anche i tre solidi ED, HV, MT sono uguali tra loro: e perciò quanto è multiplice la base LF della base AF, tant' è multiplice il solido LU del solido AU. Così anche si dimostra che quant' è multiplice la base NF della base HF altrettanto il solido NU l' è del solido ED. Or se la base LF è uguale alla base NF, il solido LU
*B. XI. è uguale al solido NU *; se la base LF supera l'altra NF, il solido LU supererà il solido NU; e se minore, minore. Laonde avendo quattro grandezze, cioè le due basi AF, FH, ed i due solidi AU, ED; ed essendosi presi della base AF e del solido AU qualunque ugualmente multiplici, cioè la base

LF, ed il solido LU; come anche della base FH e del solido ED essendosene presi altri ugualmente multiplici qualunque, cioè la base FN, ed il solido NU: si è dimostrato che se la base LF supera la base FN, anche il solido LU superi l' altro NU; se uguale, uguale; e se minore, minore: perciò come la base AF alla base FH così sta il solido AU al solido ED.

Per la qual cosa se un solido etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta, e ad un punto dato in essa costituire un angolo solido uguale ad un angolo solido dato il qual sia contenuto da tre angoli piani.

Sia data la linea retta AB, ed in essa il punto A, e sia anche dato l' angolo solido in *a* il quale è contenuto da'tre angoli piani *bac*, *bad*, *dac*; fa d'uopo costituire alla data linea retta BA, e nel punto A dato in essa un angolo solido uguale al dato in *a*. *fig.* 26.

Si prenda in uno de' lati *ad* del dato angolo solido in *a* un punto *d*, dal quale si abbassi la perpendicolare *de* sul piano dell' angolo *bac*, che tra quelli che comprendono l' angolo solido dato è l' opposto alla *ad*; e poi per lo punto dell' incontro *e* si tiri comunque nel piano dell' angolo *bac* la linea retta *bec* che incontri i lati *ab*, *ac* di

un tal angolo ne' punti *b*, *e*. Ciò posto si costituisca al punto dato A nella linea retta AB l' angolo BAC uguale al dato *bac*, si taglino le BA, AC rispettivamente uguali alle *ba*, *ac*, e si congiunga BC. E perchè i due triangoli BAC, *bac* hanno i lati BA, AC uguali ai lati *ba*, *ac*, ciascuno a ciascuno, e l' angolo BAC è pure uguale all' altro *bac*; dovrà essere la base BC uguale alla base *bc*, l' angolo ABC uguale all' angolo *abc*, e l' angolo ACB all' altro *acb*. Ciò posto si tagli dalla BC la BE uguale alla *be*; ed elevata dal punto E la ED perpendicolare al piano ABC ed uguale ad *ed*, si congiunga AD: dico che l' angolo solido che si costituisce in A dai tre angoli piani BAC, BAD, DAC sia il cercato.

Si uniscano le AE, BD; *ae*, *bd*. E poichè i triangoli ABE, *abe* hanno il lato AB uguale al lato *ab*, il lato BE uguale a *be*, e gli angoli ABE, *abe* compresi da questi lati uguali sono anche uguali; dovranno avere uguali le loro basi AE, *ae*: e quindi ne' triangoli AED, *aed* rettangoli in E, *e*, essendo rispettivamente uguali i lati intorno agli angoli retti in E ed *e*, saranno pure uguali le loro basi AD, *ad*. E così pure essendo i lati BE, ED intorno all' angolo retto del triangolo BED uguali rispettivamente ai lati *be*, *ed* intorno all' angolo retto dell' altro triangolo *bed* saranno uguali le loro basi BD, *bd*. Laonde i due triangoli BAD, *bad* avendo i lati BA, AD uguali a' lati *ba*, *ad*, ciascuno a ciascuno, e la base BD uguale alla *bd*; avranno anche l' angolo BAD uguale all' altro *bad*. E nel modo stesso si di-

mostrerà l' angolo DAC uguale all' altro *dac*. Quindi essendosi a' vertici A, *a* de' due angoli piani BAC, *bac* adattate in sublime le linee rette, AD, *ad* che comprendono angoli uguali co' lati BA, AC, *ba*, *ac* di essi angoli BAC, *bac*, cioè BAD a *bad*, e DAC a *dac*; gli angoli solidi che si sono in tal modo costituiti ne' punti A, *a* saranno uguali.

E perciò ad una data linea retta, ec. C. B. F.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

Descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto ad un altro dato, e che abbia per uno de' suoi lati una data linea retta.

Sia data la linea retta AB, ed il parallelepipedo CD: fa d' uopo descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto al dato CD, e che abbia per uno de' suoi lati la linea retta AB. *fig. 27.*

Si costituisca alla linea retta AB e nel punto A dato in essa un angolo solido uguale all' altro in C del parallelepipedo CD, e tale che sia l' angolo KAB uguale a GCE, l' altro HBK ad FCG, ed il rimanente HAB ad FCE. Di poi si faccia come CE a CG, così BA ad AK, e come GC a CF, così KA ad AH: finalmente si compisca il parallelogrammo BK, ed il solido AL; sarà questo il parallelepipedo cercato.

E poichè EC sta a CG, come BA ad AK; perciò i due parallelogrammi EG, BK

un tal angolo ne' punti *b*, *c*. Ciò posto si costituisca al punto dato A nella linea retta AB l' angolo BAC uguale al dato *bac*, si taglino le BA, AC rispettivamente uguali alle *ba*, *ac*, e si congiunga BC. E perchè i due triangoli BAC, *bac* hanno i lati BA, AC uguali ai lati *ba*, *ac*, ciascuno a ciascuno, e l' angolo BAC è pure uguale all' altro *bac*; dovrà essere la base BC uguale alla base *bc*, l' angolo ABC uguale all' angolo *abc*, e l' angolo ACB all' altro *acb*. Ciò posto si tagli dalla BC la BE uguale alla *be*; ed elevata dal punto E la ED perpendicolare al piano ABC ed uguale ad *ed*, si congiunga AD: dico che l' angolo solido che si costituisce in A dai tre angoli piani BAC, BAD, DAC sia il cercato.

Si uniscano le AE, BD; *ae*, *bd*. E poichè i triangoli ABE, *abe* hanno il lato AB uguale al lato *ab*, il lato BE uguale a *be*, e gli angoli ABE, *abe* compresi da questi lati uguali sono anche uguali; dovranno avere uguali le loro basi AE, *ae*: e quindi ne' triangoli AED, *aed* rettangoli in E, *e*, essendo rispettivamente uguali i lati intorno agli angoli retti in E ed *e*, saranno pure uguali le loro basi AD, *ad*. E così pure essendo i lati BE, ED intorno all' angolo retto del triangolo BED uguali rispettivamente ai lati *be*, *ed* intorno all' angolo retto dell' altro triangolo *bed* saranno uguali le loro basi BD, *bd*. Laonde i due triangoli BAD, *bad* avendo i lati BA, AD uguali a' lati *ba*, *ad*, ciascuno a ciascuno, e la base BD uguale alla *bd*; avranno anche l' angolo BAD uguale all' altro *bad*. E nel modo stesso si di-

mostrerà l' angolo DAC uguale all' altro *dac*. Quindi essendosi a' vertici A, *a* de' due angoli piani BAC, *bac* adattate in sublime le linee rette, AD, *ad* che comprendono angoli uguali co' lati BA, AC, *ba*, *ac* di essi angoli BAC, *bac*, cioè BAD a *bad*, e DAC a *dac*; gli angoli solidi che si sono in tal modo costituiti ne' punti A, *a*, saranno uguali.

E perciò ad una data linea retta, ec. C. B. F.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

Descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto ad un altro dato, e che abbia per uno de' suoi lati una data linea retta.

Sia data la linea retta AB, ed il parallelepipedo CD: fa d' uopo descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto al dato CD, e che abbia per uno de' suoi lati la linea retta AB. *fig.* 27.

Si costituisca alla linea retta AB e nel punto A dato in essa un angolo solido uguale all' altro in C del parallelepipedo CD, e tale che sia l' angolo KAB uguale a GCE, l' altro HBK ad FCG, ed il rimanente HAB ad FCE. Di poi si faccia come CE a CG, così BA ad AK, e come GC a CF, così KA ad AH: finalmente si compisca il parallelogrammo BK, ed il solido AL; sarà questo il parallelepipedo cercato.

E poichè EC sta a CG, come BA ad AK; perciò i due parallelogrammi EG, BK

avendo proporzionali i lati intorno agli angoli uguali ECG, BAK saranno simili *: e per la stessa ragione è anche il parallelogrammo KH simile all'altro GF, ed il parallelogrammo HB simile ad FE. Quindi tre parallelogrammi del solido AL sono rispettivamente simili a tre altri parallelogrammi del solido CD. Ma sono poi questi tre piani in ciascun parallelepipedo uguali e simili agli opposti: e di più gli angoli piani da' quali comprendonsi gli angoli solidi di tali parallelepipedi sono tra loro uguali e similmente disposti;
* A. XI. che perciò essi angoli solidi sono rispettivamente u-
*d. 11. XI. guali *. Laonde il solido AL sarà simile all'altro CD*. E quindi alla data linea retta AB ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Per le diagonali corrispondenti di due piani opposti di un parallelepipedo vi passa un piano, e questo divide un tal solido per metà.

fig. 24. Sia il parallelepipedo AF, e sieno AH, DF le diagonali dei piani opposti BG, CE, le quali sottendono gli uguali angoli di questi parallelogrammi: dico che per esse AH, DF vi passa un piano, e che questo divide il parallelepipedo AB per metà.

Poichè BC è parallela ed uguale sì a DA che ad FH, sarà DA uguale e parallela ad FH: sono poi esse congiunte ne' loro estremi dalle AH, DF; quindi queste congiungenti saranno ancora uguali

e parallele; perciò esse consisteranno in un piano, e la figura DAHF sarà un parallelogrammo. Ma è poi il parallelogrammo DB simile ed uguale all'altro EH, come pure il parallelogrammo CH a DG, ed il triangolo ABH al triangolo AGH, e l'altro DCF a DEF. Dunque i due prismi ABHFCD, AGHFED ne' quali resta diviso il parallelepipedo DH dal piano DAHF essendo terminati da piani uguali in numero, ed uguali e simili tra loro, e di più avendo ciascun angolo solido contenuto da tre angoli piani solamente, saranno uguali e simili tra loro *. * B. XI.

Laonde per le diagonali ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXIX

TEOREMA.

I parallelepipedi i quali hanno la medesima base e l'altezza stessa, ed i di cui lati insistenti alla base vanno a costituirsi nelle stesse linee rette, sono uguali tra loro.

Nella stessa base AB vi sieno i parallepipedi ugualmente alti AH, AK, i di cui lati AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK che insistono alla base comune vadano a costituirsi nelle stesse linee rette FN, DK: dico che il solido AH sia uguale all' altro AK. *fig.* 28.

Imperocchè essendo un parallelogrammo sì CH che CK, sarà CB uguale sì a DH che ad EK: adunque DH è uguale ad EK; e quindi dovrà esser pure

DE uguale ad HK. Per lo che il triangolo CDE è uguale al triangolo BHK. Ma è poi il parallelogrammo DG uguale al parallelogrammo HN; e per la stessa ragione di poc'anzi il triangolo AFG è uguale al triangolo LMN; ed è il parallelogrammo CF uguale al parallelogrammo BM, ed il parallelogrammo CG all'altro BN; poichè sono opposti. Dunque il prisma contenuto dai due triangoli AFG, CDE, e dai tre parallelogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma che si contiene dai due triangoli LMN, BHK, e dai tre parallelogrammi BM, MK, KL. Laonde togliendo dal solido ALBCDFNK il prisma LMNBHK, e poi dallo stesso solido toltone un'altra volta l'altro prisma AFGCDE; sarà il rimanente solido, cioè il parallelepipedo AH uguale all'altro rimanente solido, cioè al parallelepipedo AK.

Adunque i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

I parallellepipedi che hanno la base stessa e la medesima altezza, sebbene i lati insistenti alla base non vadano a costituirsi nelle stesse linee rette, sono pure uguali tra loro.

fig. 29. Sieno nella stessa base AB i parallelepipedi ugualmente alti BF, AK, ed i loro lati AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK non si vadano a costituire nelle stesse linee rette: dico che anche il

solido AH sia uguale all' altro AK.

Si prolunghino le FD, MH, e le NG, KE finchè convengano ne' punti O, P, Q, R; e si uniscano le AO, LP, BQ, CR. E poichè il piano LBHM è parallelo all' opposto ACDF; e che il piano LBHM è quello in cui esistono le parallele LB, MHPQ, e quindi la figura BLPQ: e l' altro piano ACDF è quello nel quale si trovano le parallele AC, FDOR, e quindi anche la figura CAOR; saranno perciò le figure BLPQ, CAOR in piani paralleli tra loro. E nel modo stesso, essendo il piano ALNG parallelo al piano opposto CBKE; ed il piano ALNG quello in cui esistono le parallele AL, OPGN, e quindi la figura ALPO; il piano poi CBKE quell' altro nel quale sono le parallele CB, RQEK, e quindi la figura CBQR; anche le figure ALPO, CBQR saranno in piani tra loro paralleli. Ma sono anche paralleli tra loro i piani ACBL, ORQP; per conseguenza il solido AQ è un parallelepipedo. Ma il parallelepipedo AH è uguale al parallelepipedo AQ; poichè sono sopra la stessa base, ugualmente alti, ed hanno le linee rette AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ insistenti alla base che vanno a costituirsi nelle stesse linee rette FR, MQ: ed è poi lo stesso solido AQ uguale all' altro AK; perchè anch' essi hanno la medesima base ACBL, sono ugualmente alti, e le linee rette AO, AG, LP, LN; CR, CE, BL, BQ che insistono alla base vanno a costituirsi nelle stesse linee rette ON, RK. Dunque il parallelepipedo AH sarà uguale all' altro AK.

Laonde i parallelepipedi ec. C. B. D.

COR. Quindi se nel parallelepipedo AH i lati FA, DC, HB, ML insistenti alla base AB sieno a questa inclinati: dai punti A, C, B, L si elevino ad essa le perpendicolari AO, CR, BQ, LP, le quali incontrino in piano FH opposto ad essa base AB ne' punti O, R, Q, P, e si uniscano le OR, RQ, QP, PO. E poichè le AO, LP sono perpendicolari allo stesso piano ACBL, sono an-
* 6. XI. che parallele *: ma è pure AC parallela ad LB; quindi il piano CAON, che passa per le AC, AO sarà parallelo all' altro piano BLPQ che passa per le LB, LN. Similmente si dimostra essere il piano CQ parallelo all'altro AP; ed i piani AB, OQ sono già paralleli. Dunque il solido AP è un parallelepipedo, ed è uguale all' altro LD *. E perciò:

Ogni parallelepipedo i di cui lati insistenti alla base sieno a questa obbliqui è uguale a quel parallelepipedo ugualmente alto, che ha la stessa base, ed i lati insistenti alla base perpendicolari ad essa.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

I parallelepipedi che hanno basi uguali e la stessa altezza sono uguali tra loro.

fig. 30. Sieno i parallelepipedi LK, LP posti nelle uguali basi AB, CD, e che abbiano la stessa altezza: dico che il solido LK sia uguale all' altro LP.

In primo luogo si supponga che i lati di questi tali solidi che insistono alle basi AB, CD sieno perpendicolari ad esse; e si dispongano i solidi in tal modo, che le basi si trovino in un medesimo piano, ed i lati CL, LA di queste stieno per dritto; dovrà la linea retta LM, che insiste ad esse basi nel punto L esser comune ai due solidi LK, LP. Sieno inoltre AG, HK, BE; DF, OP, CN que' rimanenti lati de' due parallelepipedi che insistono alle basi; e se mai l'angolo BLA non è uguale all' altro DLC, si prolunghino le BL, OD finchè s' incontrino in I, e per C si tiri QCR parallela a BLI, che prolungata incontri in R la HB anche prolungata. Finalmente si compiscano i solidi LS, LT. Ciò posto il solido LT il quale ha per base il parallelogrammo LN, e per piano opposto a questa l'altro parallelogrammo IT è uguale al solido LP, la cui base è lo stesso parallelogrammo LN, e DP è il piano opposto; poichè essi hanno anche la medesima altezza, ed i loro lati MV, MF, NT, NP; LI, LD, CQ, CO insistenti alla comune base cadono nelle stesse linee rette parallele PV, OI*. Or il parallelogrammo CD è uguale al parallelogrammo CI, perchè sono posti sopra la stessa base LC, e tra le medesime parallele LC, OI; ed il parallelogrammo DC si è supposto uguale all' altro AB; quindi sarà il parallelogrammo IC uguale ad esso AB; e perciò questi due parallelogrammi IC, AB serberanno uguali ragioni al terzo parallelogrammo LR, cioè sarà IC ad LR, come AB ad LR. Ma IC sta ad LR come il parallelepipedo IN all' altro LS; poichè l' intero parallelepipedo IS si è diviso col

* 29.XI.

* 25.XI. piano MLCN parallelo a' piani opposti IT, BS *. E similmente essendosi il parallelepipedo AS diviso col piano LBEM parallelo a' piani opposti AK, CS sta il parallelepipedo LK all' altro LS, come la base AB all' altra LR. Quindi stà il parallelepipedo IN al parallelepipedo LS, come l' altro LK allo stesso LS: e perciò i due parallelepipedi IN ed LK sono uguali. Ma il parallelepipedo IN si è dimostrato uguale all' altro IP; laonde sarà anche questo parallelepipedo OM uguale all' altro LK.

Che se i lati insistenti alle basi de' due parallelepipedi proposti si suppongano ad esse obbliqui: siccome ciascun di questi parallelepipedi pareggia quell' altro ch' è ugualmente alto, è posto sulla stessa base, ed ha i lati insistenti a questa
e* 30.XI. perpendicolari ad essa*; e che tali solidi si sono poc' anzi dimostrati uguali: perciò anche i proposti saranno tra loro uguali.

Adunque i parallelepipedi etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

I parallelepipedi della medesima altezza hanno tra loro la stessa ragione delle basi.

fig. 31. Sieno AB, CD i parallelepipedi proposti della stessa altezza: dico che stia l' un solido all' altro, come la base AE all' altra CF.

Si applichi al lato FG della base di uno di essi

solidi CF un parallelogrammo FH uguale all' altro AE, in modo che l' angolo FGH sia uguale all' angolo LCG; e poi si compia il parallelepipedo GK, la di cui base sia FH, ed una delle linee rette ad essa insistenti sia FD: sarà un tal solido GK uguale al proposto AB; poichè sono posti nelle uguali basi AE, FH, e sono ugualmente alti *. Ed essendo tutto il parallelepipedo CK diviso dal piano GD parallelo a' suoi piani opposti CP, HK, dovrà stare il solido GK, o il suo uguale AB, all' altro CD, come la base FH, o l' altra uguale AE, alla base CF. * 31. XI.

E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

I parallelepipedi simili sono tra loro in ragion triplicata de' lati omologhi.

Sieno i parallelepipedi simili AB, CD, e sia il lato AE dell' uno omologo al lato CF del altro: dico che il solido AB stia all' altro CD in triplicata ragione di AE a CF. *fig.* 32.

Imperocchè si prolunghino i lati AE, GE, HE in K L, ed M, e si ponga EK uguale a CF, EL ad FN, ed EM ad FR; poi si compia il parallelogrammo KL, ed il solido KO. E poichè le due KE, EL sono uguali rispettivamente alle CF, FN, e l' angolo KEL è uguale all' angolo NFC, mentre il primo di essi

è uguale all' angolo GEA con cui sta al vertice, e l'altro è pure uguale a questo stesso angolo GEA per
d.10.XI. la similitudine de' solidi AB, CD; sarà quindi il parallelogrammo KL uguale e simile all'altro CN: e dimostrandosi similmente che il parallelogrammo KM sia uguale e simile all' altro CR, ed il parallelogrammo LM all' altro FD; saranno tre parallelogrammi del solido KO uguali e simili, ciascuno a ciascuno, a tre altri del solido CD. Ma i tre rimanenti opposti a questi sono anche uguali e simili rispettivamente ad essi; perciò il solido KO è uguale
* B. XI. e simile all' altro CD *. Ciò posto, compiasi l' altro parallelogrammo GK, e poi sulle basi GK, LK si costituiscano i solidi EX ed LP della stessa altezza che il proposto AB, ed in modo, che la linea EH sia un loro lato comune. E poichè per la similitudine de' solidi AB, CD, e permutando sta AE a CF, come EG ad FN e come EH ad FR; ed FC è uguale ad EK, FN ad EL, ed FR ad EM; sarà perciò come AE ad EK, così EG ad EL, ed HE ad EM. Ma come AE ad EK, così sta il parallelogrammo AG all' altro GK; come GE ad EL, così sta GK a KL; e come HE ad EM, così è pure PE a KM. Dunque come il parallelogrammo AG all' altro GK, così stà GK a KL e PE a KM. Ma come AG ad GK, così sta il parallelepipedo AB all'al-
* 25.XI. tro EX *; come GK a KL, così sta il parallelepipedo EX all' altro LP; e come PE a KM, così sta il parallelepipedo PL all' altro KO. Laonde come il solido AB al solido EX così starà questo stesso EX al terzo LP; ed il terzo LP al

quarto OK. Or se ci sono quattro grandezze in continua proporzione; la prima si dice avere alla quarta triplicata ragione di quella che ha alla seconda *; dunque il solido AB serberà al solido KO, o al suo uguale CD, triplicata ragione dello stesso AB ad EX. Ma la ragione del solido AB all' altro EX, poc' anzi si è mostrato pareggiar quella di AE ad EK; quindi il solido AB starà all' altro CD in triplicata ragione del lato AE del primo al suo omologo CF dell' altro. C. B. D. *d.11.V.

Cor. Da ciò è manifesto, che se vi sieno quattro linee rette continuamente proporzionali, la prima di esse starà alla quarta, come il parallelepipedo che ha per lato la prima all' altro simile e similmente posto che ha per lato omologo la seconda. Imperocchè la prima sta alla quarta in triplicata ragione della prima alla seconda.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

I parallelepipedi che sono contenuti da parallelogrammi equiangoli tra loro, ciascuno a ciascuno, cioè quelli i di cui angoli solidi sono tra loro uguali, sono tra loro in ragion composta dalle ragioni de' lati intorno a questi angoli. fig. 33.

Sieno i parallelepipedi AB, CD de' quali AB è contenuto da' parallelogrammi AE, AF, AG, che sono equiangoli, ciascuno a ciascuno, ai pa-

rallelogrammi KL , HL , HK da' quali è contenuto il solido CD : dico che la ragione che ha il solido AB al solido CD sia composta dalle ragioni di AM a DL, di AN a DK, e di AO a DH.

Si prolunghino le MA , NA , OA in P , Q , R, in modo tale che AP sia uguale a DL, AQ a DK ed AR a DH ; e poi si compia il parallelepipedo AX contenuto dai parallelogrammi AS , AT , AV uguali e simili , ciascuno a ciascuno, agli altri parallelogrammi KL, HL, KH; che perciò un tal solido
* B.XI. AX è uguale e simile al solido CD*. Si compisca anche il solido AY la di cui base è AS, ed AO è una delle linee rette insistenti alla base : indi si esponga una qualunque linea retta *a* , e si faccia come AM ad AP ; così *a* ad un altra linea retta *b* , come NA ad AQ , così *b* a *c* , e come OA ad AR , così *c* a *d* . E poichè il parallelogrammo AE è equiangolo all' altro AS , sarà AE ad AS , co-
* 23.VI. me *a* a *c* *. Ma i solidi AB, AY essendo costituiti tra gli stessi piani paralleli BOY , EAS, e perciò avendo la stessa altezza, sono l' uno all' altro come la base AE alla base AS , cioè come *a* a *c*. Ed il solido AY sta al solido AX , come la base
* 25. XI. OQ alla base QR * , cioè come OA ad AR, o sia come *c* a *d*. Per la qual cosa essendo il solido AB al solido AY come la retta *a* all' altra *c*, ed il solido AY al solido AX , come *c* a *d* , sarà per equalità il solido AB al solido AX , o sia CD , come *a* a *d*. Ma la ragione di *a* a *d* è composta dalle ragioni di *a* a *b*, di *b* a *c* , e di *c* a *d* , le quali sono le stesse , ciascuna a ciascuna , colle ragioni di MA ad AP, di NA ad AQ e di OA ad AR, ed

i lati AP, AQ, AR sono uguali ai lati DL, DK, DH, ciascuno a ciascuno. Dunque il solido AB sta al solido CD in ragion composta dalle ragioni dei lati intorno agli angoli uguali: cioè di AM a DL, di AN a DK, e di AO a DH.

E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

Le basi de' parallelepipedi uguali si reciprocano colle altezze: e sono uguali que' parallelepipedi che hanno le basi reciproche alle altezze.

Sieno i parallelepipedi uguali AB, CD: dico che le di loro basi sieno reciproche alle altezze, cioè che stia come la base AL alla base CO, così l'altezza del solido CD a quella dell' altro AB. *fig.* 34.

Sieno primieramente i loro lati AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR che insistono alle basi AL, CO, perpendicolari a queste; e si supponga di più che tali basi non sieno uguali; poichè nel caso che esse fossero uguali, per l' uguaglianza de' parallelepipedi, anche le altezze AG, CM si dovrebbero pareggiare, e quindi se ne potrebbe conchiudere AL a CO, come CM ad AG. Adunque sia AL la maggiore di esse; è chiaro che essendo il parallelepipedo CD uguale all'altro AB, e la base di questo minore della base di quello, debba la sua altezza CM esser maggiore di AG altezza dell' altro. Si tagli perciò dalla CM la CT uguale alla

AG, e si compisca il solido CQ: serberà a questo ugual ragione ciascun de' dati, perchè uguali; e quindi starà AB a CQ, come CD a CQ. Ma sta il solido AB all' altro CQ, come la base AL alla
*32. XI. base CO; poichè essi sono ugualmente alti *: ed è poi il solido CD allo stesso CQ, come la base
*25. XI. PM alla base PT *, cioè come CM a CT, o ad AG; dunque starà AL a CO, come CM ad AG. E perciò le basi de' parallelepipedi AB, CD si reciprocano colle altezze.

Sieno ora le basi de' proposti parallelepipedi AB, CD reciprocamente proporzionali alle altezze; cioè sia la base AL alla base CO, come l'altezza CM del solido CD all' altezza AG del solido AB: dico che il solido AB sia uguale all' altro CD.

Poichè essendo AL a CO, come CM ad AG, è chiaro che se le basi AL e CO sono uguali, debbano anche pareggiarsi le altezze CM ed AG, ed esser quindi uguali i parellelepipedi proposti *. Che
*31. XI. se poi si supponga essere AL maggiore di CO; dovendo per conseguenza anche CM superare AG, si tagli da CM la CT uguale ad AG, e si compisca il solido CQ. E poichè sta il solido AB all' altro CQ, come la base AL alla base CO *; ed è
*32 XI. poi l' altro solido CD allo stesso CQ, come la base PM alla base PT *, e quindi come CM a
*25. XI. CT, o ad AG: le prime ragioni di queste due proporzioni saranno uguali del pari che le seconde; e sarà perciò AB a CQ, come CD a CQ: laonde i solidi AB e CD serbando ragioni uguali allo stesso solido CQ, saranno uguali.

Che se poi quei lati de' parallelepipedi proposti

che insistono alle basi non sieno a queste perpendicolari: siccome tali parallelepipedi ne pareggiano rispettivamente due altri, che hanno con essi le stesse basi, le medesime altezze, ed i lati insistenti alle basi perpendicolari ad esse *; ne segue che siccome si è dimostrato per questi secondi, che essendo essi uguali, le loro basi sieno reciprocamente proporzionali alle altezze; e che al contrario se le basi sieno reciprocamente proporzionali alle altezze, tali solidi sieno uguali; lo stesso debba anche verificarsi pe' primi, cioè per quelli i di cui lati insistenti alle basi, gli sono obbliqui. *c.30.XI.

E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

N. B. Ciò che si dimostra da Euclide nella Proposizione 35 e nel suo Corollario, si è da noi recato nel Corollario della Proposizione A di questo Libro. (*Vegg. le* NOTE).

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

Se da tre linee rette proporzionali si formi un parallelepipedo, sarà questo solido uguale all' altro equiangolo ad esso che si faccia dalla media, e ch' è perciò equilatero.

Sieno A, B, C tre linee rette proporzionali, cioè stia A a B, come B a C: dico che il parallepipedo che si forma da esse A, B, C sia uguale al paral- *fig.* 35.

lelepipedo equiangolo al primo, che si forma da B, è ch' è perciò equilatero.

Si esponga l' angolo solido in L contenuto dai tre angoli piani MLN, MLX, XLN, e prese ne' suoi lati le parti LM, LX ed LN uguali rispettivamente alle tre linee rette date A, B, C, si compia il parallelepipedo LH; e poi ad una linea retta FE uguale alla B, in un suo estremo E, si costituisca un angolo solido uguale all' al-
* 26. XI. tro ch' è in L *, e prese negli altri due lati di questo angolo le parti EG, ED uguali alla EF, si compia l'altro parallepipedo EK.

E poichè A sta a B, come B a C; starà pure ML ad FE, come ED ad LN: e perciò i parallegrammi MN, FD che hanno, per costruzione, uguali gli angoli in L ed E, avendo reciprocamente proporzionali i lati intorno a questi angoli, saranno uguali. Or essendosi adattate a' vertici L ed E de' due angoli piani uguali MLN, FED le due linee rette sublimi ed uguali LX ed EG, le quali comprendono colle LM, LN; FE, ED angoli uguali, ciascuno a ciascuno, e similmente posti; le perpendicolari che da' punti X e G si abbassano su i piani MN ed FD debbono esse-
* c. A. XI. re uguali *. Dunque i parallelepipedi LH ed EK costituiti dalle tre linee rette A, B, C nel modo già detto, avendo uguali le loro basi MN ed FD,
* 31. XI. ed uguali anche le loro altezze, saranno uguali *.

E perciò se da tre linee proporzionali ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sono proporzionali; i parallelepipedi simili e similmente posti che da esse descrivonsi, saranno anche proporzionali. E se i parallelepipedi simili e similmente posti che descrivonsi da quattro linee rette sono proporzionali; anch' esse linee rette saranno proporzionali.

Sieno AB, CD, EF, GH quattro linee rette proporzionali, cioè stia AB a CD, come EF a GH, e si descrivano dalle due AB, CD i parallelepipedi simili e similmente posti AK, CL; e dalle altre due EF, GH gli altri parallelepipedi anche simili e similmente posti EM, GN: dico che stia il parallelepipedo AK all'altro CL, come il parallelepipedo EM all' altro GN. *fig.* 36.

Si facciano continuamente proporzionali le AB, CD, O e P; come pure le EF, GH, Q ed R. E poichè AB sta a CD come EF a GH; sarà anche CD ad O, come GH a Q; ed O a P, come Q ad R: quindi le tre grandezze AB, CD, O saranno in ordinata ragione colle altre tre EF, GH, Q; e perciò essendo AB ad O, come EF a Q, di nuovo le tre grandezze AB, O, e P saranno in ordinata ragione colle altre tre EF, Q ed R: e quindi starà AB a P, come EF ad R. Ma come AB a P, così sta il solido AK all' altro CL *; e come EF ad R, così è pure il solido EM al solido GN: adunque come il solido *c.33.XI.

AK al solido CL, così sta il solido EM al solido GN.

Sia adesso il solido AK al solido CL, come il solido EM al solido GN: dico che stia anche la linea retta AB all'altra CD, come la EF alla GH.

Imperocchè si faccia come AB a CD, così EF ad ST; e poi si descriva dalla ST un parallelepipedo simile e similmente posto ad EM, o pure e GN*.
* 27.XI.
E poichè come AB a CD, così sta EF ad ST, e si sono descritti dalle AB, CD i parallelepipedi AK, CL simili e similmente posti; come pure dalle EF, ST gli altri EM, SV anche simili e similmente posti; sarà quindi AK a CL, come EM ad SV. Ma si è supposto essere AK a CL, come EM a GN; laonde il solido GN è uguale al solido SV: gli è anche simile e similmente posto; perciò i piani da' quali essi sono contenuti sono uguali e simili; e quindi saranno uguali i loro lati omologhi GH, ST. Per lo che essendo AB a CD, come EF ad ST, ed ST uguale a GH; sarà AB a CD, come EF a GH.

Adunque se quattro linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

Se un piano sia perpendicolare ad un altro, e da un punto preso in un de' piani, si abbassi la perpendicolare sull' altro; questa cadrà nella loro comune sezione.

Sia il piano CD perpendicolare all'altro AB, ed *fig.* 37. AD sia la loro comune sezione, e da un qualunque punto E preso nel piano CD si abbassi sul piano AB la perpendicolare: dico che questa debba cadere nella AD.

S' è possibile cada fuori della AD, come la EF, ed incontri in F il piano AB: dal punto F ch' è nel piano AB si abbassi sulla AD la perpendicolare FG, la quale sarà anche perpendicolare al piano CD *, e si unisca EG. E d. 4. XI. poichè la FG è perpendicolare al piano CD, ed è toccata nel punto G dalla EG, che si trova in questo piano; perciò l' angolo FGE sarà retto. Ma la EF è perpendicolare al piano AB, e quindi è anche retto l' angolo EFG. Laonde nel triangolo EFG vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo. Adunque la perpendicolare abbassata dal punto E sul piano AB non cadrà al di fuori della AD; ma bensì in questa.

E perciò se un piano ec. C. B. D.

N. B. Per la Prop. XXXIX, che si è da noi tralasciata, veggasi la NOTA ad essa.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

Se vi sieno due prismi triangolari ugualmente alti, uno de' quali abbia per base un parallelogrammo e l'altro un triangolo, e quel parallelogrammo sia doppio di questo triangolo; essi prismi saranno uguali.

fig. 38. Sieno ABECDF, GHKLMN due prismi triangolari ugualmente alti, il primo de' quali è contenuto dai due triangoli ABE, CDF, e dai tre parallelogrammi AD, DE, EC; e l'altro contiensi dai due triangoli GHK, LMN, e dai tre parallelogrammi LH, HN, NG; e di più per lo primo di essi si prenda per base il parallelogrammo AF, e per l'altro il triangolo GHK, e quel parallelogrammo sia doppio di questo triangolo: dico che il prisma ABECDF sia uguale al prisma GHKLMN.

Si compiscano i solidi AX, GO. E poichè il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK, e che di questo triangolo n'è anche doppio il parallelogrammo HK; sarà il parallelogrammo AF uguale al parallelogrammo HK. Laonde i due parallelepipedi ED, GO avendo basi uguali AF, HK e la medesima altezza, saranno uguali; e perciò dovranno anche essere uguali i prismi proposti ABECDF; HGKNLM, che sono rispettivamente
* 28.XI. la metà di que' parallelepipedi *.

Quindi se vi sieno due prismi ec. C. B. D.

FINE DELL' XI. LIBRO.

IL DUODECIMO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.



LEMMA I.

Se vi sieno due grandezze disuguali, e si tolga dalla maggiore più che la metà, poi dal residuo si tolga anche più che la metà, e così continuamente si faccia; vi dovrà finalmente rimanere una grandezza che sarà più piccola della minore delle proposte.

Sieno le due grandezze disuguali AB, C, delle quali AB sia la maggiore: dico che se si tolga da AB più che la metà, e dal residuo si tolga anche più la metà, e ciò si continui sempre a fare; vi dovrà finalmente rimanere una grandezza minore di C. *fig.* 39.

Imperocchè essendo C omogenea ad AB, presa più volte dovrà superarla. Sia dunque ED quel multiplice di C ch' è il primo a superare BA, ed esso sia diviso nelle parti EG, GF, FD ciascuna uguale a C; e poi si tolga da BA più che

la metà BH, dal residuo HA più che la metà HK, e ciò si continui a fare finchè BA resti divisa nello stesso numero di parti della ED. Ciò fatto, essendo ED maggiore di BA, se da ED si tolga EG ch' è meno della metà di essa, e da BA se ne tolga più che la metà BH; dovrà il residuo GD esser maggiore dell' altro HA: e similmente togliendo da GD la sua metà GF, e da HA più che la metà sua HK; dovrà il residuo FD esser maggiore di KA. Ma FD è uguale a C; dunque C sarà maggiore di KA. C. B. D.

LEMMA II.

Dati due cerchi concentrici, iscrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, ed in numero pare, il qual non tocchi il cerchio minore.

fig. 40. Sieno ABDC, *abd* i due cerchi proposti, che sian descritti intorno al comune centro O: bisogna iscrivere nel maggiore di essi ABDC un poligono di lati uguali ed in numero pare, il qual non tocchi il cerchio minore *abd*

Per lo centro comune O si tiri la linea retta BD, e poi dal suo estremo D si tiri al cerchio *bad* la tangente D*a*A: indi si divida continuamente per metà la semicirconferenza BAD, si dovrà finalmente pervenire ad un arco minore dell' altro ACD *; suppongasi esser questo CD, e si congiunga la linea retta CD, sarà questa il lato del poligono cercato.

*11.XII.

Imperocchè essendo l'arco DCA maggiore dell'ar-

co CD, la corda DC di questo dovrà cadere al di là della corda AD di quello, per rispetto, alla circonferenza *bad*; e quindi siccome la linea retta DA tocca il cerchio *bad*, l'altra BD non dovrà nemmen toccarla. E perciò se si vada adattando successivamente nel cerchio ABCD questa DC, si verrà a descrivere in esso un poligono di lati uguali, ed in numero pare, che non toccherà il cerchio minore *abd*. C. B. F.

Cor. Che se fossero dati i due archi di cerchio DCE, *dae* descritti intorno al comune centro O, e si volesse dividere l'esteriore di essi DCE in tal numero di parti uguali, sicchè alcuna delle linee rette tirate per due punti prossimi di tali divisioni non potesse toccare l'altro arco *dae*. È chiaro che si otterebbe ciò che si dimanda tirando per un estremo D dell'arco DE la tangente D*a*A all'altro arco *dae*, o al cerchio della di cui circonferenza quest'arco n'è parte, e poi dividendo sempre per metà l'arco DE, finche si giunga ad un arco DC minore di DA.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I poligoni simili iscritti ne' cerchi sono tra loro come i quadrati de' diametri.

Sieno i cerchi ABCDE, FGHKL, ed in essi ci sieno iscritti i poligoni simili ABCDE, FGHKL: dico che stia il quadrato di BM a *fig. 41.*

quello di GN, come il poligono ABCDE all' altro FGHKL.

Si congiungano le BE, AM; GL, FN. E perchè il poligono ABCDE è simile al poligono FGHKL; sarà anche il triangolo BAE simile al
* 20. VI. triangolo GFL *: e perciò l' angolo BEA uguale all' altro GLF. Or i due angoli BEA, GLF pareggiano rispettivamente gli altri BMA, GNF; dunque saranno anche tra loro uguali questi due altri angoli BMA, GNF: e perciò i due triangoli BAM, GFN rettangoli in A ed F avendo anche uguali gli angoli AMB, FNG saranno simili; e starà BA a GF, come BM a GN, ed il quadrato di BA a quello di GF, come il quadrato di BM all' altro di GN. Ma il quadrato di BA sta all' altro di GF, come il poligono ABCDE all' altro FGHKL; perchè sì quei quadrati, che questi poligoni sono tra loro in du-
*c. 1. 20 VI. plicata ragione di BA a GF *; dunque starà pure quel poligono a questo come il quadrato di BM a quello di GN.

E perciò i poligoni simili ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

I cerchi sono tra loro come i quadrati de' diametri.

fig. 42. Sieno i cerchi ABCD, EFGH, e BD, FH i loro diametri: dico che il quadrato di BD stia

al quadrato di FH, come il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

Imperocchè se ciò non è, il quadrato di BD avrà a quello di FH la stessa ragione del cerchio ABCD ad un' altro cerchio minore di EFGH, o pur maggiore. L' abbia primieramente ad un minore che sia *efgh*, e s' intenda esser questo descritto intorno allo stesso centro dell' altro EFGH. Ciò posto s' iscriva nel cerchio maggiore EFGH un poligono ENFPG ec. di lati uguali ed in numero pare, il quale non tocchi il cerchio minore *efgh* *; e poi un *l.2.XII. altro poligono AIBKC ec. simile a questo s' iscriva nel cerchio ABCD: sarà il poligono AIBKC ec. al poligono ENFPG ec., come il quadrato di BD all' altro di FH *. Ma quel quadrato si è sup- * 1.XII. posto essere a questo, come il cerchio ABCD all' altro EFGH; quindi starà il cerchio ABCD al cerchio EFGH, come il poligono AIBKC ec. all' altro ENFPG ec.. Per lo che essendo il cerchio ABCD maggiore del poligono AIBKC ec. in esso iscritto, sarà anche l' altro cerchio *efgh* maggiore del poligono ENFPG ec. in cui è compreso. Ma n' è minore: perciò non sta il quadrato di BD a quello di FH, come il cerchio ABCD ad un altro *efgh* minore di EFGH. E similmente si dimostrerebbe che non possa stare il quadrato di FH a quello di BD come il cerchio EFGH ad un altro cerchio minore di ABCD.

Che se si supponga essere il quadrato di BD a quello di FH, come il cerchio ABCD ad un altro cerchio SVT maggiore di EFGH; sarà invertendo il cerchio SVT all' altro ABCD, come il qua-

drato di FH a quello di BD. Ma il cerchio SVT deve stare all' altro ABCD, come il cerchio EFGH ad un altro cerchio che sarà minore di ABCD; poichè il cerchio SVT è maggiore dell' altro EFGH: quindi starebbe il quadrato di FH a quello di BD, come il cerchio EFGH ad un altro minore di ABCD. Lo che si è già dimostrato impossibile.

Laonde non potendo il quadrato di BD serbare a quello di FH la stessa ragione che il cerchio ABCD ad un altro cerchio minore di EFGH, o pur maggiore; dovrà stare il quadrato di BD a quello di FH, come il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

E perciò i cerchi ec.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Ogni piramide a base triangolare si divide in due piramidi, anche a basi triangolari, simili ed uguali tra loro, e simili alla tutta; ed in due prismi uguali, i quali sono maggiori della metà dell' intera piramide.

fig. 43. Sia la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D: dico che una tal piramide ABCD si divide in due piramidi, che hanno anche per base de' triangoli, e che sono uguali e simili tra loro, e simili alla tutta; ed in due prismi uguali, i quali sono maggiori della metà dell' intera piramide.

Si dividano per metà i lati AB, BC, CA, AD, DB, DC de' triangoli che terminano la piramide triangolare ABCD in E, F, G, H, K, L, e poi si uniscano le EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. E poichè AE è uguale ad EB, ed AH ad HD; sarà EH parallela a DB. Per la stessa ragione anche HK è parallela ad AB: dunque la figura HEBK è un parallelogrammo; e perciò HK è uguale ad EB, e quindi ad AE, ed EH è uguale a BK, ossia a KD. Laonde i due triangoli EAH, KHD, avendo i lati EA, AH uguali ai lati KH, HD, ciascuno a ciascuno, e la base EH uguale alla base KD, saranno uguali e simili: e per la stessa ragione il triangolo AHG è pure uguale e simile al triangolo HLD. Or perchè i lati EH, HG dell'angolo EHG sono rispettivamente paralleli ai lati KD, DL dell' altro angolo KDL, ch' è in un piano diverso da quello in cui si trova il primo; perciò l'angolo EHG è uguale all'altro KDL *: ma sono anche uguali, ciascuno a ciascuno, i lati che comprendono questi angoli; quindi i triangoli EHG, KDL saranno uguali e simili; e perciò la base EG sarà uguale alla base KL. Inoltre i tre lati EA, AG, GE del triangolo EAG, essendo uguali, ciascuno a ciascuno, a' lati KH, HL, LK dell' altro triangolo KHL; dovrà anche il triangolo EAG essere uguale e simile all' altro KHL. È dunque la piramide a base triangolare EAGH uguale e simile all'altra anche a base triangolare KHLD *.

* 10. XI.

* B. XI.

Or essendosi dimostrata KH parallela a BA, è chiaro che il triangolo KDH sia equiangolo, e

perciò simile all' altro BDA; e similmente si rileva che il triangolo DKL sia simile a DBC, ed il triangolo DHL all'altro ADC. Ma è poi il triangolo BAC simile all'altro EAG, e questo si è dimostrato simile al triangolo KHL; laonde sarà il triangolo BAC anche simile al triangolo KHL: e quindi
A.XI e) la piramide BACD è simile all' altra HKLD.
d.10.XI) Per lo che essendosi dimostrata questa piramide HKLD simile all' altra AEGH; dovrà anche la piramide AEGH esser simile alla piramide ABCD: e perciò ciascuna delle due piramidi AEGH, HKLD sarà simile all' intera piramide ABCD. E poichè BF è uguale ad FC, sarà il parallelogrammo EBFG doppio del triangolo GFC; e quindi il prisma contenuto dai due triangoli BKF, EHG, e dai tre parallelogrammi EBFG, EBKH, KHGF sarà uguale all' altro che si contiene dai due triangoli GFC, HKL, e dai tre parallelogrammi KFCL, LCGH, HKFG; poichè se si prende per base del primo prisma il parallelogrammo EBFG, e per base dell' altro il triangolo GFC il primo di essi avrà per base un parallelogrammo doppio del triangolo ch'è base del-
*40. XI. l' altro, e saranno di più ugualmente alti *. Ed è poi manifesto che ciascuno di questi due prismi BKFEHG, e GFCHKL sia maggiore di ciascuna delle piramidi AEGH, HKLD: poichè se si unisca EF, si vede che il prisma BKFEHG è maggiore della piramide EBFK. Ma questa piramide è uguale all' altra AEGH; poichè sono con-
B. XI. tenute da' piani uguali e simili: perciò anche il prisma BKFEHG è maggiore della piramide AEGH. E

l' altro prisma GFCHKL, perchè uguale al prisma KBFHEG, è anche maggiore della piramide HKLD, ch' è uguale all' altra AEGH. Adunque i due prismi dei quali si è parlato sono maggiori di queste due piramidi. E perciò l' intera piramide ABCD a base triangolare si è divisa in due piramidi uguali e simili tra loro, ed alla tutta; ed in due prismi uguali, che sono maggiori della metà della piramide intera. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una piramide triangolare si divida in due piramidi triangolari uguali e simili tra loro, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali; poi ciascuna delle piramidi che si ottiene da questa prima divisione si divida nel modo stesso, e così in seguito; e la medesima divisione si pratichi in un' altra piramide triangolare di uguale altezza alla prima: sarà come la base della prima piramide alla base dell' altra, così tutt' i prismi che si contengono nell' una a tutt' i prismi che contengonsi nell' altra, e che sono uguali in numero.

Sia la piramide triangolare ABCD, ed essa si divida in due piramidi uguali tra loro e simili alla tutta, ed in due prismi uguali; poi si divida ciascuna delle piramidi che si ottengono da questa divisione nel modo stesso, e così si continui successivamente; e la medesima divisione si pra- *fig. 43. e 44.*

tichi anche nell' altra piramide MNOX di uguale altezza alla prima: dico che come la base ABC alla base MNO, così stiano tutt' i prismi che si contengono nella piramide ABCD a tutti gli altri, uguali in numero, che si contengono nella piramide MNOX.

Si faccia per ciascuna delle piramidi ABCD, MNOX la stessa costruzione che nella precedente proposizione. E poichè BF è uguale ad FC, ed AG a GC, sarà FG parallela a BA; e perciò il triangolo BCA è simile al triangolo FCG: e così pure si dimostrerà essere il triangolo NOM simile all' altro QOR. Or poichè BC è doppia di CF, ed NO di OQ; sarà BC a CF, come NO ad OQ; ed essendosi descritti sulla prima e seconda di queste linee rette i due rettilinei simili e similmente posti BCA ed FCG, e sulle altre due NO ed OQ gli altri rettilinei simili e similmente posti NOM, QOR; dovrà stare il triangolo BCA al triangolo FCG, come il triangolo NOM all'altro QOR, e permutando starà il triangolo BCA al triangolo NOM, come il triangolo FCG al triangolo QOR. Or poichè i piani ABC, HKL sono paralleli, come anche gli altri MNO, STY; le perpendicolari che dai punti D, X si abbassano su i piani ABC, MNO, le quali sono tra loro uguali, dovranno restar divise per metà dagli altri piani HKL, STY; poichè anche le altre linee rette DC, XO son
17.XI. divise per metà dai piani stessi ne' punti L, Y *. Laonde i due prismi GFCHKL, RQOSTY saranno ugualmente alti: e perciò starà il prisma FGCKHL al prisma QROTSY, come la base FCG

alla base QOR; cioè come il triangolo BCA all'altro NOM. E poichè i due prismi che esistono nella piramide BCAD sono tra loro uguali, come anche tra loro uguali sono gli altri due che contengonsi nella piramide MNOX *; sarà perciò la somma de' due primi a quella de' due altri, come un di quelli FGCKHL ad un di questi QORTYS *, cioè, secondo si è dimostrato, come BCA ad NOM. Similmente si dimostra che, divise le piramidi KHLD, TSYX nel modo stesso che le proposte, sta la somma de' due prismi contenuti nella prima a quella degli altri due che contengonsi nella seconda, come la base HKL alla base STY, e quindi come FGC a QRO, o finalmente come BAC ad NMO. Dunque come BAC ad NMO, così starà la somma de' due prismi compresi nella piramide BCAD e degli altri due compresi nella piramide KHLD alla somma de' quattro altri prismi, due compresi nella piramide MNOX, e due altri nella piramide TSYX. E continuando a dimostrare lo stesso per gli prismi che si ottengono dalla divisione delle piramidi EAGH, PMRS, e di tutte le altre che risultano dividendo queste e le precedenti KHLD, TSYX continuamente, nel modo indicato nell' enunciazione; si concluderà in fine, che la somma di tutti i prismi contenuti nella piramide BACD stia alla somma di tutti quelli che contengonsi nell'altra MNOX, e che sono in numero uguale ai primi, come la base dell' una piramide BAC alla base NMO dell' altra. C. B. D.

* 3. XII.

* 15. V.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Le piramidi triangolari di uguali altezze sono tra loro come le basi.

fig. 43. e 44. Sieno le piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, MNOX: dico che stia la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD alla piramide MNOX.

Poichè se non è così, starà il triangolo ABC al triangolo MNO, come la piramide BACD ad un solido minore che la piràmide MNOX, o pur maggiore. Sia primieramente ad un solido minore V; e dividasi la piramide MNOX in due piramidi tra loro uguali, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali, i quali nella somma sono maggiori della
* 3. XII. metà della piramide *; indi si dividano similmente le piramidi che ottengonsi da una tal divisione; e così si continui a fare, finchè vi restino alcune piramidi nella piramide MNOX, le quali sieno minori dell'eccesso della piramide MNOX sul so-
*1. 1. XII. lido V *. Dinotino, per esempio, un tal residuo le piramidi PMRS, TSYX; che perciò i prismi che in tal modo resteranno assegnati nella piramide MNOX dovranno esser maggiori del solido V. Ciò fatto si divida la piramide BACD similmente alla piramide MNOX, ed in tante parti, in quante si è divisa questa; sarà come la base ABC alla base MNO, così la somma dei prismi contenuti nel-

la piramide BACD alla somma di quelli altri che contengonsi nella piramide MNOX *. Ma come la base ABC alla base MNO, così sta pure la piramide ABCD al solido V. Dunque la piramide ABCD starà al solido V, come tutt' i prismi contenuti nella piramide ABCD a tutti quelli che contengonsi nella piramide MNOX; e quindi essendo la piramide ABCD maggiore dei prismi in essa contenuti, sarebbe anche il solido V maggiore di quelli che si contengono nella piramide MNOX. Ma n' è minore; il che non può essere. Adunque non può stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD ad un solido minore della piramide MNOX. E similmente si dimostrerà che non possa star la base MNO alla base ABC, come la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD.

* 4.XII.

Dico ora, che neppure possa la base BAC serbare alla base NMO, la stessa ragione che la piramide ABCD ad un solido Z maggiore della piramide MNOX. Poichè si avrebbe in tal caso, invertendo, la base MNO all' altra ABC, come il solido Z alla piramide ABCD; ma come il solido Z alla piramide ABCD, così deve stare la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD; poichè quel solido Z è maggiore di questa piramide MNOX; sarebbe dunque come la base MNO alla base ABC, così la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD. Il che, come si è poc' anzi dimostrato, è un assurdo. Laonde neppur può stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD

ad un solido Z maggiore della piramide MNOX. Si è poi dimostrato, che ne tampoco poteva quella piramide serbar tal ragione ad un solido minore di questa. Adunque dovrà stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD all' altra MNOX.

E quindi le piramidi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Le piramidi della stessa altezza, ed a basi poligone, sono tra loro nella ragione delle basi.

fig. 45. Sieno le piramidi a basi poligone ABCDEM ed FGHKLN, le quali abbiano la stessa altezza: dico che come la base ABCDE alla base FGHKL, così stia la piramide ABCDEM all'altra FGHKLN.

Dividasi la base ABCDE ne' triangoli ABC, ACD, ADE, e la base FGHKL ne' triangoli FGH, FHK, FLK; e s' intendan questi triangoli esser le basi di altrettante piramidi ugualmente alte che le proposte, delle quali le tre prime abbiano per vertice il punto M, e le altre tre il punto N. E poichè sta il triangolo ABC al triangolo FGH, come la piramide ABCM alla piramide FGHN; e che come il triangolo ACD allo stesso triangolo FGH, così sta la piramide ACDM alla piramide FGHN; sarà il trapezio ABCD al triangolo FGH, come
* 24. V. la piramide ABCDM all' altra FGHN *. Ma è di nuovo come il triangolo ADE al triangolo

FGH, così la piramide ADEM alla stessa FGHN; quindi starà il poligono ABCDE al triangolo FGH, come la piramide ABCDEM alla piramide FGHN *. * 24. V.
Similmente, paragonando i triangoli FLK, FKH, ed FGH con questo stesso triangolo FGH, e le piramidi FLKN, FKHN, FHGN con quest' ultima piramide FHGN, si dimostrerà essere la base FGHKL alla base FGH, come la piramide FGHKLM alla piramide FGHN; ed invertendo la base FGH alla base FGHKL, come la piramide FGHN alla piramide FGHKLN. Laonde essendo la base ABCDE alla base FGH, come la piramide ABCDEM alla piramide FGHN, e la base FGH alla base FGHKL, come la piramide FGHN all' altra FGHKLN; sarà, per equalità, la base ABCDE alla base FGHKL, come la piramide ABCDEM all' altra FGHKLN.

E perciò le piramidi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Ogni prisma a base triangolare si divide in tre piramidi uguali tra loro, le quali hanno le basi triangolari.

Sia il prisma che ha per base il triangolo ABC, *fig.* 46. e per piano opposto a questa l' altro triangolo DEF: dico che il prisma ABCDEF si divide in tre piramidi triangolari tra loro uguali.

Si tirino le diagonali CE, CD, DB. E poichè la diagonale DB divide il parallelogrammo ADEB ne' due triangoli uguali ABD, EDB; perciò le due piramidi ABDC, EDBC che hanno rispettivamente per basi que' triangoli, e'l vertice comune
* 5.XII. in C saranno tra loro uguali *. Ma la piramide che ha per base il triangolo EDB, e per vertice il punto C, è la stessa che l'altra la cui base è il triangolo EBC, ed il punto D n'è il vertice; poichè l'una e l'altra è contenuta dagli stessi triangoli. Dunque anche la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C è uguale a quell'altra, che ha per base il triangolo EBC, e per vertice il punto D. Similmente poichè il parallelogrammo FCBE è diviso dalla diagonale CE, il triangolo ECF è uguale al triangolo ECB; e quindi anche la piramide che ha per base il triangolo ECB, e per vertice il punto D è uguale alla piramide la cui base è il triangolo ECF, e lo stesso punto D n'è il vertice. Ma questa piramide si è dimostrata uguale a quell'altra che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C; adunque anche la piramide che ha per base il triangolo ECF, e per vertice il punto D è uguale a quella che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C. Quindi il prisma ABCDEF si divide in tre piramidi uguali, le quali hanno per basi dei triangoli, cioè nelle ABDC, EBDC, ECFD. E poichè la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C è la stessa che la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D; poichè sono con-

tenute dagli stessi piani : e che la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C si è dimostrata esser la terza parte del prisma la cui base è il triangolo ABC, ed il piano opposto è DEF; perciò anche la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D è la terza parte di un tal prisma. C. B. D.

Cor. E' chiaro da ciò che ogni piramide sia la terza parte del prisma che ha la medesima base, e l' altezza stessa. Poichè se la base comune a questi due solidi sia un' altra qualsivoglia figura rettilinea; potendosi sì il prisma che la piramide concepir divisi rispettivamente in tanti prismi e piramidi, che abbiano per basi dei triangoli, quanti di questi si possono assegnare in essa figura rettilinea: e ciascuno di questi prismi essendo triplo della piramide corrispondente; sarà la somma di essi, cioè il prisma proposto, anche triplo della somma delle piramidi, cioè della piramide che ha la medesima base, e l' altezza stessa di esso prisma.

Cor. 2. Di più i prismi ugualmente alti sono tra loro come le basi; poichè le piramidi che hanno le stesse loro basi, e la medesima altezza sono tra loro come le basi *. *6. XII.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Le piramidi simili che hanno le basi

triangolari, sono tra loro in triplicata ragione de' lati omologhi.

fig. 47. Sieno le piramidi simili e similmente poste ABCG, DEFH, le quali abbiano per basi i triangoli BCA, EFD, e per vertici i punti G ed H: dico che la piramide ABCG serbi alla piramide DEFH ragion triplicata di quella che il lato BC ha all'omologo EF.

Imperocchè si compiscano i parallelogrammi ABCM, GBCN, ABGK; ed indi poi il parallelepipedo BGML, ch'è contenuto da questi piani e dagli opposti ad essi. Similmente si compisca il parallelepipedo EHPO contenuto dai parallelogrammi DEFP, HEFR, DEHX e dagli opposti a questi. E poichè le piramidi ABCG, DEFH sono simili, dovrà il triangolo ABC esser simile all' altro DEF; e quindi i due angoli ABC, DEF saranno uguali, ed i lati AB, BC del primo saranno proporzionali ai lati DE, EF dell' altro. Laonde i due parallelogrammi EP, BM avendo un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno a questi angoli, dovranno esser simili. E così pure si dimostrerà che il parallelogrammo BN sia simile all' altro ER, e BX ad EK. Ma i tre parallelogrammi BM, BN, BK sono rispettivamente uguali e simili agli opposti; ed i tre altri EP, ER, EX sono anche simili ed uguali ai loro opposti; quindi i due parallelepipedi BL, EO, essendo terminati dallo stesso numero di piani simili, ed avendo perciò uguali i loro angoli solidi *,
* A. XI.
saranno simili tra loro *. Per lo che essendo i pa-
*d.10.XI.

rallelepipedi simili in triplicata ragione de' loro lati omologhi * ; i solidi BL , EO saranno in triplicata ragione di quella che il lato BC serba al suo omologo EF . Or come il solido BL al solido EG , così sta la piramide ABCG all' altra DEFH , essendo queste piramidi le seste parti di que' solidi ; mentre i prismi che sono le metà di essi , sono tripli delle corrispondenti piramidi * . Dunque sarà pure la piramide ABCG all' altra DEFH in triplicata ragione di BC ad EF . * 33 XI. * 7. XII.

Scol. Da ciò si può rilevare facilmente che anche *le piramidi simili che hanno per basi de' rettilinei , sono tra loro in triplicata ragione de' lati omologhi*.

Imperocchè sieno ABCDEM , FGHKLN le piramidi simili e similmente poste, le quali hanno per basi i rettilinei ABCDE , FGHKL . Si dividano quei rettilinei ne' triangoli ABC, ACD, ADE; FGH, FHK, FKL, i quali saranno simili tra loro, ciascuno a ciascuno *. E poichè le piramidi proposte sono simili , sarà il triangolo ABM simile al triangolo FGN , ed il triangolo BCM simile a GHN; quindi come MA ad AB, così sta NF ad FG; ed è inoltre come AB ad AC , così FG ad FH , per esser simili i triangoli ABC , FGH ; quindi , per equalità , come MA ad AC, così sta NF ad FH . Similmente si dimostrerà che AC sta a CM , come FH ad HN ; laonde sarà di nuovo per equalità , come AM ad MC , così FN ad NH : e perciò i triangoli AMC , FNH , avendo proporzionali i lati, saranno simili . Per lo che le piramidi triangolari ABCM , FGHN essendo contenute da piani fig. 45. * 20. VI.

simili ed uguali in numero, ed avendo uguali i
* A.XI. loro angoli solidi *, saranno simili tra loro. E nel modo stesso si dimostrerà che la piramide ACDM sia simile alla piramide FHKN, e la piramide ADEM all' altra FKLN. Or essendo simili le piramidi triangolari ABCM, FGHN, sarà l' una all' altra in triplicata ragione del lato AC all' omologo FH; e per la stessa ragione la piramide ACDM sta alla piramide FHKN in triplicata ragione di AC ad FH; quindi come sta la piramide ACDM alla piramide FHKN, così starà la piramide ABCM all'altra FGHN. E similmente si dimostra che come la piramide ADEM alla piramide FKLN, così stia la piramide ACDM all' altra FHKN. Laonde dovendo stare un antecedente ad un conseguente, come tutti gli an-
* 12. V. tecedenti a tutti i conseguenti *; sarà la piramide ABCM alla piramide FGHN, come tutta la piramide ABCDEM a tutta l' altra FGHKLN. Ma la piramide ABCM sta alla piramide FGHN in
* 8. XII. triplicata ragione del lato AB all' omologo FG *; perciò anche tutta la piramide ABCDEM serba a tutta l' altra piramide FGHKLN triplicata ragione del lato AB all' omologo FG. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Le basi triangolari di due piramidi uguali si reciprocano colle altezze: e reciprocandosi le basi triangolari di due piramidi colle altezze, esse sono uguali.

Sieno le piramidi uguali che abbiano le basi triangolari ABC, DEF, e per vertici i punti G, H: dico che le basi e le altezze di queste piramidi ABCG, DEFH sieno reciprocamente proporzionali, cioè che come la base ABC alla base DEF, così stia l' altezza della piramide DEFH a quella della piramide ABCG. *fig.* 48.

Imperocchè si compiano i parallelogrammi AC, AG, GC, come anche gli altri DF, DH, HF; ed indi si compiscano anche i parallelepipedi BGML, EHPO, i quali sono compresi rispettivamente da quei piani, e dagli opposti ad essi. E poichè le piramidi ABCG, DEFH sono uguali; e che della piramide ABCG n' è sestuplo il parallelepipedo BL, e dell' altra DEFH n' è anche sestuplo l' altro parallelepipedo EO: perciò questi parallelepipedi BL, EO saranno uguali; e quindi le loro basi BM ed EP si reciprocheranno colle altezze. Ma come la base BM alla base EP, così sta il triangolo ABC all' altro DEF; dunque starà il triangolo ABC al triangolo DEF, come l' altezza del solido EO a quella del solido BL. Laonde poichè l' altezza del solido BL è la stessa di quella della piramide ABCG, e l' altezza del solido EO è anche la stessa che quella dell' altra piramide DEFH; ne segue che starà pure come la base ABC alla base DEF, così l' altezza della piramide DEFH all' altezza della piramide ABCG. E perciò le basi e le altezze delle piramidi uguali ABCG, DEFH sono reciprocamente proporzionali.

Che se i triangoli ABC, DEF si reciprochino

colle altezze delle piramidi ABCG, DEFH, cioè che stia la base ABC alla base DEF, come l'altezza della piramide DEFH all' altezza della piramide ABCG: dico che la piramide ABCG sia uguale all' altra DEFH.

Imperocchè fatta la medesima costruzione: poichè sta la base ABC alla base DEF, come l' altezza della piramide DEFH a quella della piramide ABCG; ed è poi la base ABC alla base DEF, come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP; sarà perciò come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP, così l' altezza della piramide DEFH, o ch' è lo stesso quella del parallelepipedo EO, all'altezza della piramide ABCG, cioè del parallelepipedo BL. Quindi questi parallelepipedi saranno tra loro uguali; poichè hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze: e perciò anche uguali dovranno essere le piramidi ABCG, DEFH, che sono le seste parti di tali parallepipedi.

Laonde le basi triangolari ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che ha la medesima base e l' altezza stessa.

fig. 49. Abbia un cono la medesima base con un cilindro, cioè il cerchio ABCD, e l' altezza stessa: dico che il cono è la terza parte del cilindro, ossia

che il cilindro è triplo del cono.

Poichè se quel cilindro non è triplo del cono, sarà o più che triplo di un tal cono, o pur meno. Sia primieramente meno che triplo; e perciò si supponga esser triplo di quell' altro cono della stessa altezza che il proposto, la cui base sia il cerchio *abcd* minore di ABCD, e descritto intorno allo stesso centro. S' iscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFC ec. di un numero pare di lati uguali, i quali non tocchino il cerchio minore *abcd*, e poi s' intenda eretto su di questo poligono il prisma ugualmente alto che il cilindro, e la piramide il di cui vertice è lo stesso che quello del cono proposto, la quale comprendendo in se, com' è evidente, il cono che ha per base il cerchio *abcd* è maggiore di esso. Per lo che essendo una tal piramide la terza parte di quel prisma, mentre tali solidi hanno la base stessa, e sono ugualmente alti; dovrà quel prisma essere più che triplo di quel cono che ha per base il cerchio *abcd*. E perciò essendo il cilindro proposto maggiore di questo prisma che vi sta dentro; dovrà esser più che triplo del cono la cui base è il cerchio *abcd*. Ma si era supposto che ne fosse triplo; il che ripugna. Adunque non può il cilindro che ha per base il cerchio ABCD esser meno che triplo del cono che ha la stessa base, e la medesima altezza del cilindro.

Dico ora che ne tampoco possa quel cilindro esser più che triplo del cono; poichè allora si potrà supporre esser triplo di quell' altro cono di uguale altezza, la cui base è il cerchio PQRS maggiore di

ABCD, e descritto anche intorno allo stesso centro. Or s' iscriva similmente nel cerchio PQRS un poligono PYQZR ec. di un numero pare di lati uguali, i quali non incontrino il cerchio interiore ABCD, e su di un tal poligono s' intenda eretto il prisma dell'altezza stessa del cilindro, e la piramide che ha per vertice quello del cono, e che perciò è iscritta in questo, e quindi n' è minore. E poichè una tal piramide è terza parte di quel prisma, sarà perciò il medesimo prisma meno che triplo di esso cono: e quindi il cilindro proposto essendo minore di questo prisma nel quale si contiene, dovrà anche esser meno che triplo del cono la cui base è il cerchio PQRS. Ma se n' era supposto triplo: e ciò anche ripugna. Laonde nè anche può il cilindro che ha per base il cerchio ABCD esser più che triplo del cono che ha la stessa base, e la medesima altezza del cilindro. E perciò un tal cilindro non potendo esser nè meno che triplo di un cono che ha la stessa sua base, e la medesima altezza, nè più che triplo; dovrà necessariamente esserne triplo. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

I coni ed i cilindri dell' altezza stessa sono tra loro come le basi.

fig. 50. Abbiano la medesima altezza i coni ed i cilindri, le cui basi sono i cerchi ABCD, EFGH de-

scritti intorno ai diametri BD, FH, e che hanno gli assi KL, MN: dico che come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così stia il cono ABCDL al cono EFGHN.

Poichè se non è così, sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono ABCDL ad un cono minore dell'altro EFGHN, o pur maggiore. Sia primieramente ad un cono minore, il quale abbia per vertice il punto N, e per base il cerchio *efgh* minore di EFGH, e descritto intorno allo stesso centro M. S'iscriva nel cerchio maggiore EFGH un poligono EPFRGec. di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *efgh*, ed un altro poligono AYBQCec. simile a questo s'iscriva anche nel cerchio ABCD; e poi su tali poligoni s'intendano erette le piramidi che hanno gli stessi vertici L ed N dei coni, e che perciò saranno iscritte in essi. E poichè il poligono AYBQCec. sta al poligono EPFRGec., come il quadrato del diametro BD a quello del diametro FH *; ed in questa ragione è pure il cerchio ABCD al cerchio EFGH; sarà perciò il poligono AYBQCec. al poligono EPFRGec., come il cerchio ABCD al cerchio EFGH. Ma è poi il poligono AYBQCec. al poligono EPFRGec., come la piramide che ha per base il poligono AYBQCec., e per vertice il punto L a quella la cui base è il poligono EPFRGec. ed il punto N è il vertice: e si è supposto essere il cerchio ABCD all'altro EFGH, come il cono ABCDL all'altro *efghN*. Dunque sarà il cono ABCDL al cono *efgh*N, come

* 1. XI.

ABCD, e descritto anche intorno allo stesso centro. Or s' iscriva similmente nel cerchio PQRS un poligono PYQZR ec. di un numero pare di lati uguali, i quali non incontrino il cerchio interiore ABCD, e su di un tal poligono s' intenda eretto il prisma dell'altezza stessa del cilindro, e la piramide che ha per vertice quello del cono, e che perciò è iscritta in questo, e quindi n' è minore. E poichè una tal piramide è terza parte di quel prisma, sarà perciò il medesimo prisma meno che triplo di esso cono: e quindi il cilindro proposto essendo minore di questo prisma nel quale si contiene; dovrà anche esser meno che triplo del cono la cui base è il cerchio PQRS. Ma se n' era supposto triplo: e ciò anche ripugna. Laonde nè anche può il cilindro che ha per base il cerchio ABCD esser più che triplo del cono che ha la stessa base, e la medesima altezza del cilindro. E perciò un tal cilindro non potendo esser nè meno che triplo di un cono che ha la stessa sua base, e la medesima altezza, nè più che triplo; dovrà necessariamente esserne triplo. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

I coni ed i cilindri dell' altezza stessa sono tra loro come le basi.

fig. 50. Abbiano la medesima altezza i coni ed i cilindri, le cui basi sono i cerchi ABCD, EFGH de-

scritti intorno ai diametri BD, FH, e che hanno gli assi KL, MN: dico che come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così stia il cono ABCDL al cono EFGHN.

Poichè se non è così, sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono ABCDL ad un cono minore dell'altro EFGHN, o pur maggiore. Sia primieramente ad un cono minore, il quale abbia per vertice il punto N, e per base il cerchio *efgh* minore di EFGH, e descritto intorno allo stesso centro M. S'iscriva nel cerchio maggiore EFGH un poligono EPFRGec. di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *efgh*, ed un altro poligono AYBQCec. simile a questo s' iscriva anche nel cerchio ABCD; e poi su tali poligoni s' intendano erette le piramidi che hanno gli stessi vertici L ed N dei coni, e che perciò saranno iscritte in essi. E poichè il poligono AYBQCec. sta al poligono EPFRGec., come il quadrato del diametro BD a quello del diametro FH *; ed in questa ragione è pure il cerchio ABCD al cerchio EFGH; sarà perciò il poligono AYBQCec. al poligono EPFRGec., come il cerchio ABCD al cerchio EFGH. Ma è poi il poligono AYBQCec. al poligono EPFRGec., come la piramide che ha per base il poligono AYBQCec., e per vertice il punto L a quella la cui base è il poligono EPFRGec. ed il punto N è il vertice: e si è supposto essere il cerchio ABCD all' altro EFGH, come il cono ABCDL all' altro *efghN*. Dunque sarà il cono ABCDL al cono *efghN*, come

* 1. XI.

la piramide AYBQCec.L all' altra EPFRGec.N; e quindi siccome il cono ABCDL è maggiore della piramide AYBQCec.L in esso iscritta, dovrebbe anche il cono *efgh*N esser maggiore della piramide EPFRGec.N. Ma n' è minore; poichè questa lo comprende: adunque il cerchio ABCD non sta al cerchio EFGH, come il cono ABCDL ad un cono minore del cono EFGHN. E similmente si dimostrerebbe che non può stare il cerchio EFGH al cerchio ABCD, come il cono EFGHN ad un cono minore del cono ABCDL.

Dico inoltre che neppure possa stare il cerchio ABCD al cerchio EFGH, come il cono ABCDL ad un altro cono maggiore del cono EFGHN. Poichè s' è possibile sia questo il cono STVN, il quale abbia lo stesso vertice N del cono EFGHN, e per base il cerchio STV maggiore dell' altro EFGH; sarà invertendo il cerchio EFGH all' altro ABCD, come il cono STVN all'altro ABCDL. Ma come questo cono STVN all'altro ABCDL, così deve stare il cono EFGHN, ch' è minore del cono STVN, ad un altro cono minore di ABCDL, e che potrà supporsi esser quello che ha la stessa altezza e per base un cerchio minore di ABCD, e concentrico; dunque dovrebbe stare il cerchio EFGH al cerchio ABCD, come il cono EFGHN ad un altro cono dell' altezza stessa di questo, la cui base fosse un cerchio minore di ABCD. Il che poc' anzi si è dimostrato impossibile. Laonde non può serbare il cerchio ABCD al cerchio EFGH la stessa ragione del cono ABCDL ad un cono maggiore dell' altro EFGHN. Si è poi dimostrato che nè anche pote-

va serbarla ad un cono minore: perciò dovrà stare il cerchio ABCD al cerchio EFGH, come il cono ABCDL al cono EFGHN.

Or come il cono ABCDL al cono EFGHN, così sta un cilindro all' altro; poichè questi cilindri sono rispettivamente tripli di quei coni*: dunque sarà pure il cerchio ABCD al cerchio EFGH, come il cilindro descritto sul primo all' altro di uguale altezza che ha per base il secondo. C.B.D. *10.XII.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

I coni ed i cilindri simili sono tra loro in triplicata ragione dei diametri delle basi.

Sieno i coni ed i cilindri simili, che hanno per basi i cerchi ABCD, EFGH descritti intorno ai diametri BD, FH, e per assi le KL, MN: dico che il cono ABCDL stia al cono EFGHN, in triplicata ragione di BD ad FH. *fig.* 51

Poichè se non sta il cono ABCDL al cono EFGHN in triplicata ragione di BD ad FH; starà in questa ragione il cono ABCDL ad un cono minore di EFGHN, o pur maggiore. Sia primieramente in triplicata ragione di BD ad FH il cono ABCDL ad un altro cono *efgh*N, la cui base è il cerchio *efgh* minore dell' altro EFGH, e descritto intorno allo stesso centro, ed il vertice è lo stesso punto N. S' iscriva nel cerchio maggiore EFGH un poligono di un numero pare di

lati uguali EOFPGec., il quale non tocchi il cerchio minore *efgh*; e poi un altro poligono ATBYCec. simile a questo s'iscriva nel cerchio ABCD. Su di questi poligoni s' intendano erette le piramidi che hanno per vertici quelli dei coni proposti, nei quali saranno perciò iscritte; e sia LBT uno dei triangoli che contengono la piramide ATBYCec.L, ed NOF il corrispondente nell' altra piramide EOFPGec.N. Si uniscano le KT, MO. E poichè il cono ABCDL è simile al cono EFGHN,
*d.24.XI sarà BD ad FH, come l' asse KL all' asse MN *. Ma BD sta ad FH, come BK ad FM: dunque BK starà ad FM, come KL ad MN; e permutando BK a KL, come FM ad MN. Per la qual cosa i triangoli BKL, FMN, avendo uguali gli angoli BKL, FMN, che sono retti, e proporzionali i lati intorno ad essi, saranno simili. Similmente poichè BK sta a KT, come FM ad MO, e gli angoli BKT, FMO sono uguali; mentre quella parte che l' angolo BKT è di quattro retti, che sono intorno al centro K, la stessa è l' angolo FMO di quattro retti, che sono intorno al centro M: dovrà il triangolo BKT esser simile all' altro FMO. E poichè si è dimostrato che BK sta a KL, come FM ad MN; ed è poi BK uguale a KT, ed FM uguale ad MO: sarà anche TK a KL, come OM ad MN: Quindi i triangoli TKL, OMN che hanno gli angoli TKL, OMN uguali, perchè retti, saranno anche simili. Or per gli triangoli simili BKL, FMN sta LB a BK, come NF ad FM; e per gli altri triangoli BKT, FMO, che sono anche simili, sta BK a BT, co-

me FM ad FO; sarà quindi, per equalità, LB a BT, come NF ad FO: e similmente si dimostrerà che LT stia a TB, come NO ad OF. Laonde essendosi dimostrato esser anche TB a BL, come OF ad FN; sarà, di nuovo per equalità, TL ad LB, come NO ad NF. Dunque anche i triangoli LTB, NOF avendo proporzionali i loro lati, saranno equiangoli, e perciò simili: e le due piramidi triangolari BKTL, FMON, avendo i loro angoli solidi rispettivamente uguali *, ed essendo terminate dallo stesso numero di piani simili l'uno all'altro, saranno simili; e quindi l'una di esse starà all'altra in triplicata ragione di BK ad FM. E nel modo stesso, conducendo dai punti A, Q, ec. delle linee rette al punto K, e dai punti E, R, ec. delle linee rette all'altro M, e su i triangoli che vengono in tal modo a formarsi intendendo erette quelle piramidi che hanno i vertici stessi dei coni, si dimostrerà che ciascuna delle prime piramidi stia a ciascuna delle altre, in triplicata ragione di BK ad FM, o ch'è lo stesso di BD ad FH. Ma come un antecedente ad un conseguente, così stanno tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti; dunque come la piramide BKTL all'altra FMON, così deve stare l'intera piramide ATBYCec.L all'intera piramide EOFPGec.N; e perciò anche quella piramide starà a questa, in triplicata ragione di BD ad FH. Laonde essendosi supposto che in questa ragione stia il cono ABCDL all'altro *efgh*N; starà quel cono a questo, come la piramide ABCDL all'altra *efgh*N. Adunque siccome quel primo cono è maggiore della pirami-

* A. XI.

de ATBYCec.L in esso iscritta, dovrebbe anche il cono *efgh*N esser maggiore della piramide EOFPGec.N. Ma n' è minore, poichè questa lo comprende; adunque il cono ABCDL non può serbare ad un cono minore dell' altro EFGHN ragion triplicata di BD ad FH. Similmente dimostreremo che non possa la ragion triplicata di FH a BD essere uguale a quella del cono EFGHN ad un cono minore dell' altro ABCDL.

Dico ora che nè tampoco possa la triplicata ragione di BD ad FH esser quanto quella del cono ABCDL ad un cono maggiore del cono EFGHN, ed ugualmente alto, il quale per conseguenza abbia per base il cerchio STV maggiore dell' altro EFGH. Imperocchè invertendo si avrebbe il cono STVN all' altro ABCDL in triplicata ragione di FH a BD. Ma il cono STVN deve stare all'altro ABCDL, come il cono EFGHN, ch'è minore di STVN, ad un altro cono minore di ABCDL, che potrà supporsi avere lo stesso vertice di questo, e per base un cerchio minore di ABCD e descritto intorno allo stesso centro, adunque sarebbe il cono EFGHN a questo in triplicata ragione di FH a BD. E ciò si è dimostrato poc' anzi impossibile. Non potendo dunque la ragione triplicata di BD ad FH pareggiar quella del cono ABCDL ad un altro cono minore, o maggiore di EFGHN, che gli si è supposto simile; dovrà necessariamente essere il cono ABCDL al cono EFGHN in triplicata ragione di BD ad FH.

Or il cono ABCDL sta al cono EFGHN, come il cilindro che ha la stessa base ed altezza del

primo cono all' altro che ha la stessa base ed altezza dell' altro cono; poichè questi cilindri avendo le medesime basi ed altezze dei coni, ne sono tripli; dunque anche l' un cilindro starà all' altro in triplicata ragione di BD ad FH. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se un cilindro sia segato da un piano parallelo ai piani opposti, starà come il cilindro al cilindro, così l' asse all' asse.

Sia il cilindro AD segato dal piano GH parallelo ai piani opposti AB, CD, il quale incontri l' asse EF in K, e sia la linea GH la comune sezione del piano GH e della superficie del cilindro AD; sia di più AEFC quel parallelogrammo rettangolo che rivolgendosi intorno al lato EF descrive il cilindro AD*, e la retta GK sia la comune sezione del piano GH coll' altro AEFC. E poichè i piani paralleli AB, GH sono segati dal piano AEKG, le loro comuni sezioni AE, GK saranno parallele*; quindi AK è un parallelogrammo rettangolo, il quale perciò nel rivolgersi intorno ad EK descriverà un cilindro, ed il suo lato GK opposto ad AE descriverà un cerchio, il cui centro sarà il punto K; ed un tal cerchio essendo lo stesso che la sezione GH, è chiaro che il piano GH divida il cilindro AD nei due cilindri AH, CD, che sono quelli che verrebbero de-

fig. 52.

*d.21.XI

*16.XI.

scritti dalla rivoluzione dei parallelogrammi AK, GF intorno alle EK, KF. Or io dico che stia il cilindro AH al cilindro HC, come l' asse EK all' asse KF.

Si produca l'asse FE dall'una e dall'altra parte, e poi si taglino quante se ne vogliano EN, NL uguali alla EK, e quante altre ne piaccia FX, XM uguali alla KF; e per gli punti L, N, X ed M si tirino i piani paralleli alle basi AB, CD del cilindro: si dimostrerà come si è fatto del piano GH, che le comuni sezioni di quei piani e della superficie del cilindro prodotto sieno cerchi, i quali hanno per centri i punti L, N, X ed M: e di più che tali piani tronchino i cilindri OS, RB, CY e TQ. Ciò premesso, i tre cilindri OS, RB ed AH avendo uguali le loro altezze LN, NE ed EK, dovranno
11.XII. esser tra loro come le basi; e perciò saranno uguali al pari di queste: dunque il cilindro OH e l'asse suo LK saranno ugualmente multiplici del cilindro AH e del suo asse EK. E similmente si dimostrerà che il cilindro GQ e 'l suo asse KM sono ugualmente multiplici del cilindro GD e del suo asse KF. Or è chiaro, che se l' asse LK del cilindro OH è maggiore dell' asse KM dell' altro cilindro GQ, anche quel cilindro è maggiore di questo; e che se l' asse LK fosse uguale, o minore dell'asse KM, anche il cilindro OH sarebbe uguale, o minore del cilindro GQ. Adunque vi sono quattro grandezze, cioè i due assi EK, KF, ed i due cilindri BG, GD: ed essendosi presi qualunque ugualmente multiplici dell' asse EK, e del cilindro BG, cioè l' asse KL, ed il cilindro

OH; come pure dell' asse KF, e del cilindro GD essendosi presi qualunque altri ugualmente multiplici, cioè l' asse KM, ed il cilindro GQ; si è dimostrato, che se l' asse KL supera l' asse KM, anche il cilindro PG supera il cilindro GQ, e se uguale uguale, se minore minore: dovrà dunque stare l' asse EK all' asse KF, come il cilindro BG al cilindro GD.

E perciò se un cilindro ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

I coni ed i cilindri che hanno basi uguali sono tra loro come le altezze.

Sulle basi uguali AB e CD sieno posti i cilindri EB ed FD: dico che come il cilindro EB al cilindro FD, così stia l' asse GH all' asse KL. *fig.* 53.

Si produca l'asse KL di uno di essi cilindri in N, e poi troncata la LN uguale alla HG, s' intenda intorno all' asse LN formato il cilindro CM. E poichè i cilindri EB, CM hanno la medesima altezza, saranno come le loro basi AB, CD *. Ma *11.XII. queste sono uguali: quindi anche uguali saranno i cilindri EB, CM. Or essendosi il cilindro FM segato con un piano CD parallelo ai suoi piani opposti; dovrà il cilindro CM serbare all'altro FD, la stessa ragione dell' asse NL all' asse LK *. Ma il *13.XII. cilindro CM è uguale al cilindro EB, e l'asse LN all' asse GH; quindi sarà il cilindro EB all' altro

FD, come l' asse HG del primo all' asse LK dell' altro. E poichè come il cilindro EB all' altro FD, così sta il cono ABG al cono CDK; *10.XII. essendo i cilindri tripli dei coni*: sarà perciò come l' asse GH all' asse KL, così il cono ABG al cono CDK.

Adunque i coni, ed i cilindri ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Le basi dei cilindri, e dei coni uguali si reciprocano colle altezze; e se si reciprocano le basi colle altezze di due cilindri, e di due coni, essi sono uguali.

fig. 54. I cerchi ABCD, EFGH descritti intorno ai diametri AC, EG sieno le basi di due cilindri, e di due coni uguali, e KL, MN i loro assi, che sono anche le loro altezze: dico che le basi e le altezze dei cilindri uguali AX, EO sieno reciprocamente proporzionali, cioè che stia la base ABCD alla base EFGH, come l'altezza MN all' altezza KL.

Imperocchè l' altezza KL o è uguale all' altezza MN, o gli è disuguale. Gli sia primieramente uguale: e poichè il cilindro AX è uguale al cilindro EO, e che i cilindri ugualmente alti sono come le basi; dovrà essere anche la base ABCD uguale alla base EFGH. Laondè la base ABCD sta alla base EFGH, come l' altezza MN all' altezza KL.

Che se le altezze KL ed MN non sieno uguali; ma sia MN la maggiore di esse, si tagli da MN, PM uguale a KL, e poi si seghi il cilindro EO col piano TYS tirato per P parallelo alle basi EG, RO; sarà un cerchio la comune sezione di quel piano e del cilindro. Ed essendo il cilindro AX uguale all' altro EO, dovranno essi serbare al cilindro ES la stessa ragione. Ma il cilindro AX sta al cilindro ES, come la base ABCD alla base EFGH; poichè hanno la stessa altezza *; ed il cilindro EO sta all' altro ES, come MN ad MP; poichè il cilindro EO è segato dal piano TYS parallelo ai piani opposti *. Dunque starà la base ABCD alla base EFGH, come l' altezza MN all' altezza MP, ossia KL: cioè le basi dei cilindri uguali AX, EO si reciprocano colle altezze.

*11.XII.

*13.XII.

Sieno ora reciprocamente proporzionali le basi e le altezze dei cilindri AX, EO, cioè stia la base ABCD alla base EFGH, come l' altezza MN all' altezza KL: dico che il cilindro AX sia uguale al cilindro EO.

Imperocchè se sia la base ABCD uguale alla base EFGH, è chiaro che dovrà essere anche l' altezza MN uguale all' altezza KL; e perciò il cilindro AX uguale al cilindro EO. Che se poi non sia la base ABCD uguale alla base EFGH; sia ABCD la maggiore. E poichè sta la base ABCD alla base EFGH, come l' altezza MN all' altezza KL, sarà anche MN maggiore di KL: e perciò fatta la stessa costruzione della parte precedente; poichè come la base ABCD alla base

EFGH, così sta l' altezza MN all' altezza KL, e quest' altezza KL è uguale all' altezza MP; sarà la base ABCD alla base EFGH, come il cilindro AX all' altro ES; poichè sono ugualmente
*11.XII. alti *: ed è poi come l'altezza MN all' altezza MP,
*13.XII. o KL, così il cilindro EO allo stesso ES *. Dunque il cilindro AX sta all' altro ES, come il cilindro EO allo stesso ES; e perciò il cilindro AX è uguale al cilindro EO. E così pure si dimostrerà per gli coni. C. B. D.

N. B. La Proposizione 16. non si trova più in questo luogo; perchè si è da noi trasportata nel principio di questo Libro XII.: ed è precisamente il Lemma II. (*Veggasi la* Nota *ad esso*).

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se la semicirconferenza di un semicerchio si divida continuamente per metà quante volte si voglia, e si congiungano i punti prossimi delle divisioni; e che poi fatta un' identica operazione in un altro semicerchio, si concepiscano essi rivolgersi insieme coi rettilinei che contengono intorno ai diametri: i solidi che da questi rettilinei si descrivono saranno tra loro in triplicata ragione dei diametri.

fig. 55 Sieno BAC, EDF due semicerchi i quali suppongansi descritti intorno al comune centro O,

ed abbiano per diametri le BC, EF; e divisa continuamente per metà la semicirconferenza BAC nei punti A, K, L, si congiungano le BK, KA, AL, LC; e poi una simile operazione si faccia nel semicerchio EDF: dico che i solidi che si descrivono dai rettilinei BKALC, EHDIF, nel rivolgersi che fanno i semicerchi BAC, EDF insiem con quei rettilinei intorno ai loro diametri BC, EF, sieno tra loro in triplicata ragione di essi diametri BC, EF.

Si uniscano le OH, OK. E poichè quella parte ch' è l' angolo EOH di quattro retti che sono intorno al centro O, la stessa è l' angolo BOK dei medesimi quattro retti; perciò sarà l' angolo EOH uguale all' altro BOK: e quindi OH coinciderà con OK; ed essendo OE ad OB, come OH ad OK; sarà EH parallela a BK, e l' angolo HEO uguale all' altro KBO. Similmente si dimostra che la OD passi per A, che DH sia parallela ad AK, e l' angolo ODH uguale all' angolo OAK: e così in seguito. Ciò posto si abbassino dai punti K, H le perpendicolari KM, HP alla BC; saranno simili i triangoli BKM, EHP i quali sono equiangoli: e quindi sarà BM ad MK, come EP a PH. Laonde i coni che da tali triangoli si descrivono nel rivolgersi intorno ai loro lati BM, EP saranno anche simili *; *d.24.XI e perciò starà il cono descritto dal triangolo BMK a quello che descrive l' altro triangolo EPH, in triplicata ragione di KM ad HP *, ossia di KO *12.XII. ad HO; poichè per essere anche simili i triangoli MKO, PHO sta permutando MK a

PH, come KO ad HO. Or si prolunghino le AK, DH finchè incontrino la CB prolungata in R, S: ed essendo simili i triangoli OAR, ODS, perchè equiangoli, i coni che da essi descrivonsi nel rivolgersi intorno ai loro lati OR, OS saranno anchè simili; e perciò starà il cono che si descrive dal triangolo OAR all'altro che vien descritto dal triangolo ODS, in triplicata ragione di OA ad OD, ossia di OK ad OH. Ma è poi anche il triangolo KMR equiangolo e quindi simile al triangolo HPS; che perciò i coni che essi descrivono rivolgendosi intorno ai loro lati MR, PS sono pure in triplicata ragione di KM ad HP, ossia di OK ad OH. Laonde starà il cono descritto dal triangolo AOR a quello che descrive il triangolo DOS, come il cono descritto dal triangolo KMR a quello che descrive il triangolo HPS; e per conseguenza dovrà stare il solido descritto dal quadrilineo KAOM nella sua rivoluzione intorno al suo lato OM a quello che descrive il quadrilinéo HDOP nel rivolgersi intorno al suo lato OP, come il cono descritto dal triangolo
* 19. V. AOR a quello che si descrive dal triangolo DOS*. E quindi siccome il cono descritto dal triangolo AOR sta a quello che descrivesi dal triangolo DOS in triplicata ragione di OK ad OH; dovrà anche stare il solido descritto dal quadrilineo KAOM a quello che descrive l' altro quadrilineo HDOP in triplicatá ragione di OK ad OH. Ma in questa stessa ragion triplicata si è dimostrato esser anche il conó descritto da BMK a quello che si descrive da EPH. Dunque sarà il cono descritto da

BMK a quello che descrive EPH, come il solido descritto dal quadrilineo KAOM a quello che descrive l'altro quadrilineo HDOP. E perciò sarà tutto il solido descritto dal rettilineo BKAO nel rivolgersi intorno a BO a quello che si descrive dall'altro rettilineo EHDO nella sua rivoluzione intorno ad EO, come il cono descritto da BMK a quello che descrive EPH *, cioè in triplicata ragione di OK ad OH. E così continuando a dimostrare, si conchiuderà in fine che sta l'intero solido descritto dalla rivoluzione del semipoligono BKALC nel rivolgersi intorno a BC all'altro solido che descrivesi dal semipoligono EHDIF nel rivolgersi intorno ad EF, in triplicata ragione di OK ad OK, ossia di BC ad EF. * 12. V.

E perciò se la semicirconferenza. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Le sfere sono tra loro in triplicata ragione dei diametri.

Sieno le sfere descritte intorno ai diametri BC, EF dai semicerchi BAC, EDF: dico che la sfera che ha per diametro BC stia a quella che ha EF per diametro, in triplicata ragione di BC ad EF. *fig.* 56.

Imperocchè se la sfera che ha per diametro BC non sta a quella che hà EF per diametro, in triplicata ragione di BC ad EF; sia primicramente

questa ragione uguale a quella della sfera che ha per diametro BC ad un' altra minore di quella del diametro EF; e quindi descritta da un semicerchio *edf* minore dell' altro EDF, e che suppongasi avere lo stesso centro di questo. Si divida continuamente per metà la semicirconferenza EDF, finchè si pervenga ad iscrivere nel semicerchio EDF la metà EHDIF di quel poligono di un numero pare di lati uguali, il quale non tocca il cerchio minore *edf*; e poi si divida continuamente per metà l' altra semicirconferenza BAC tante volte, quante volte si è così divisa la semicirconferenza EDF: si verrà in tal modo ad iscrivere anche nel semicerchio BAC la metà BKALC di un poligono di un numero pare di lati uguali simile a quello di cui EHDIF era metà. Or se i due semipoligoni BKALC, EHDIF s' intendano rivolgersi insieme coi semicerchi nei quali sono iscritti, e coll' altro *edf* intorno ai rispettivi diametri, si verranno da quei semipoligoni a descrivere due solidi iscritti nelle sfere che si generano in tal rivoluzione dai semicerchi BAC, EDF; e di più è manifesto che il solido descritto dal semipoligono EHDIF non possa toccare la sfera che si descrive dal semicerchio *edf*. Laonde dovendo stare il solido descritto dal semipoligono BKALC a quello che descrive l' altro EHDIF, in triplicata ragione di BC ad EF; e questa ragione essendosi supposto pareggiare l' altra della sfera che ha per diametro BC a quella che ha per diametro *ef*; dovrà anche stare la sfera del diametro BC a quella del diametro *ef*, come il

solido descritto dal semipoligono BKALC all' altro che si descrive dal semipoligono EHDIF. E quindi siccome la sfera del diametro BC è maggiore del solido descritto dal semipoligono BKALC, ch' è in essa; dovrebbe perciò anche la sfera del diametro *ef* esser maggiore del solido descritto dal semipoligono EHDIF. Ma n' è minore, perchè questo la comprende: e ciò è impossibile. Non può dunque la triplicata ragione di BC ad EF essere uguale alla ragione della sfera del diametro BC ad un'altra sfera minore di quella che ha EF per diametro. E similmente si dimostrerebbe, che la ragion triplicata di EF a BC non può pareggiar la ragione della sfera del diametro EF ad un altra sfera minore di quella che ha BC per diametro.

Dico di più, che non possa la ragion triplicata di BC ad EF pareggiar la ragione della sfera del diametro BC ad una sfera maggiore di quella che ha EF per diametro. Poichè s' è possibile sia questa nuova sfera quella che si descrive dal semicerchio STV, maggiore dell' altro EDF: starà invertendo la sfera descritta dal semicerchio STV, cioè quella che ha per diametro SV, alla sfera che ha per diametro BC, in triplicata ragione di EF a BC. Ma la sfera che ha per diametro SV sta a quella che ha per diametro BC, come la sfera il di cui diametro è EF ad un'altra sfera minore di quella del diametro BC: il che è manifesto; poichè la sfera del diametro SV è maggiore della sfera del diametro EF. Adunque dovrebbe la triplicata ragione di EF a BC pareggiar la ragione della sfera del diametro EF ad una sfera minore di quella che ha BC

per diametro. Il che si è già dimostrato impossibile. Quindi nè anche può essere la triplicata ragione di BC ad EF uguale a quella della sfera che ha per diametro BC ad un' altra sfera, maggiore di quella che ha per diametro EF. Si è poi dimostrato che neppure poteva serbar tal ragione ad una sfera minore: perciò dovrà necessariamente essere la sfera del diametro BC a quella del diametro EF, in triplicata ragione di BC ad EF. C. B. D.

FINE.

IL PRIMO LIBRO

DI

ARCHIMEDE

SULLA SFERA E SUL CILINDRO

NUOVAMENTE ESPOSTO

Per servir di continuazione ai Libri XI. e XII. degli Elementi di EUCLIDE.

NAPOLI

1812.

PREFAZIONE.

Il primo libro di Archimede sulla sfera e sul cilindro è, tra le non poche opere geometriche originali di questo divino ingegno, il solo che possa presentarsi alla primiera istruzione de' Giovani, che intraprendono la carriera geometrica. Esso forma la continuazione de' Libri XI. e XII. degli Elementi di Euclide, o piuttosto è il complemento della teoria sul cilindro e la sfera, che questo Geometra aveva cominciata a trattare nel XII. Libro, ordinando e dimostrando alla sua maniera alcune importanti verità, che riguardano il rapporto di tali solidi, le quali erano state scoperte da Eudosso, come si rileva dalla lettera di Archimede a Dositeo, premessa al primo libro sulla sfera e sul cilindro, la quale è stata restituita alla sua integrità, con alcuni manoscritti, dal Professore di letteratura greca Giacomo Moòr, coll' assistenza del suo collega Roberto Simson. In un tal libro Archimede intraprende ad assegnare la misura di questi solidi, sì per riguardo alla loro superficie, che per rispetto alla solidità loro; o che sieno interi, o pur tagliati con piani perpendicolari all' asse: e finalmente assegna il rapporto della sfera al cilindro circoscritto, che rinvenne esser lo stesso sì per la superficie, che per la solidità. Ed ei restò sì pago di questa bella scoperta, che, anteponendola ad infinite altre importantissime da lui fatte, la volle per compagna fin nella tomba.

. Queste verità Archimedee essendo state senza dubbio da lui rinvenute col metodo dei limiti, del quale fece tanto uso, e con tanto profitto, non potè egli poi dimostrarle ricalcando il cammino d' invenzione; poichè vi avrebbe in tal caso dovuto includere la considerazione metafisica dell' infinito, che agli accurati Geometri antichi dispiaceva non poco, come lontana dal vero rigore: che perciò dovè servirsi di ripieghi indiretti; e premetterci ancora non pochi lemmi. Or questi lemmi, e queste dimostrazioni di Archimede, sebbene sieno di molto pregio presso i Geometri, per gli molti tratti di sublimità d' ingegno, che vi si ravvisano ad ogni passo; pure, non bisogna negarlo, non eran sì facili a comprendersi e ritenersi da' giovani; e questa ragione ha fatto allontanare tutti coloro che hanno esposto un tal libro dal sistema di dimostrare da lui tenuto. Ma la maggior parte di costoro, avendo adottate le teorie dell' infinito, si era di gran lunga allontanata dallo stile elementare, conveniente ad un libro di geometrica istituzione. Intanto fortunatamente è avvenuto, che le medesime ricerche fatte da me, per semplificare alcune dimostrazioni del XII. Libro di Euclide, mi abbiano somministrato il mezzo di conciliare nelle verità Archimedee la semplicità e facilità delle dimostrazioni, col rigor geometrico, ch' era la prima ed essenzial cosa, a cui doveva aversi riguardo. Io mi sono dunque servito per le dimostrazioni di esse di quell' istesso ripiego indiretto, ch' Euclide aveva adottato nella dimostrazione del-

la Proposizione 18. del suo XII. Libro; e del quale mi era avvaluto per dimostrare la 10., 11., e 12. del medesimo Libro. In tal modo ho anche ottenuto un altro vantaggio, quello, cioè, di non far discernere in questi libri elementari la mano dei Geometri diversi che gli avean composti. Nelle Note alla fine di questo volume si potrà più distesamente vedere quello che ho quì accennato; e vi si troveranno anche notate alcune altre necessarie modificazioni da me fatte in alcuni luoghi di questo libro di Archimede. Quì però conviene far osservare, che le superficie curve dei tre corpi rotondi, che Archimede trasmutava speciosissimamente in cerchi, le ho io esibite in rettangoli: poichè in tal modo non solamente riesce più comodo il servirsene nella pratica, ove spesso se ne ha bisogno; ma anche era ciò necessario, per preparare i giovani, i quali debbono percorrere l'intera carriera delle Matematiche, all'applicazione dei Metodi Sommatorj, alla quadratura delle superficie curve, ove non si possono gli elementi di queste esprimere altrimenti, che secondo l'esibizione che ne ho data. Aggiungasi benanche, che in questo modo mi è riuscito più facile l'applicarvi per le dimostrazioni quel principio Euclideo, del quale quì sopra ho parlato. Affinchè però il giovane, imbattendosi a leggere Archimede, non concepisse il minimo dubbio per tal diversità: ed anche per lo motivo, che sì maravigliose trasformazioni non fossero affatto dimenticate, ho rapportato in uno Scolio a ciascuno di quei Teoremi la corri-

spondenza che v' era tra le mie esibizioni, e le Archimedee, riducendo facilmente quelle a queste.

Non avendo poi Archimede esibite le superficie dei corpi rotondi per mezzo di figure rettilinee, ha quindi tralasciato di recar ne' suoi Teoremi la riduzione delle loro solidità a quelle di solidi terminati da piani, contentandosi solamente d' indicare il rapporto, che v' era tra loro, e completando così in certo modo ciò, che aveva intrapreso a fare Euclide nella Proposizione 10 del XII. Libro de'suoi Elementi. Or è chiaro, che da tali riduzioni non si poteva ricavare verun vantaggio per la pratica; e perciò io vi ho aggiunto un teorema, nel quale ho stabilito il rapporto tra una piramide ed un cono: dal quale poi facilmente si deriva la riduzione del cilindro, o della sfera ad un solido terminato da piani.

A questo libro di Archimede ho aggiunto l'altro *de Circuli dimensione*, che con esso formava una sola dottrina; giacchè era necessario per ridurre in pratica le verità che vi si contengono. E siccome dopo tante approssimazioni sì grandi, che si sono ritrovate per la quadratura del cerchio dai moderni Geometri, sarebbe stato strano, che io avessi ritenuta quella di Archimede; perciò ho cercato tra le ultime quella, che fosse più energica, e per la quale non vi fosse bisogno che di soli artifizj elementari di Geometria, e di Aritmetica; e questa mi è sembrata esser quella dell' illustre Geometra Giacomo Gregory, che ho esposta in una maniera semplicissima, e molto adattata alle menti dei giovani.

IL PRIMO LIBRO
DI ARCHIMEDE
SULLA SFERA E SUL CILINDRO.

DEFINIZIONI.

1. Se da un punto della circonferenza del semicerchio generatore di una sfera si abbassi la perpendicolare al diametro; ciascuno di que'solidi che vien descritto da uno de' due semisegmenti circolari ne' quali resta diviso il semicerchio, si dirà *segmento sferico*: e l' *altezza* di esso sarà quella parte del diametro, che gli corrisponde nel semisegmento, che lo genera.

2. Il *settore sferico* è quel solido, che si descrive da un settore circolare, il quale si rivolga intorno ad uno de' suoi raggi immobile, finchè ritorni dove cominciò il suo moto.

Un tal solido è composto da un segmento sferico al quale vi sia aggiunto, o pur ne sia tolto quel cono la cui base è il cerchio, ch' è base di esso segmento, ed il vertice è il centro della sfera.

3. Il *rombo conico* è quel solido, che si descrive da un triangolo qualunque, il quale si rivolga intorno ad un suo lato, che comprende angoli acuti con ciascuno dei rimanenti.

E' chiaro che un tal solido sia composto da due coni, i quali hanno una base comune, ed i loro assi per dritto.

PRINCIPJ.

1. La linea retta è la più breve di quante linee si tirano da un punto ad un altro.

2. Le due tangenti, che da un punto preso fuori di un cerchio si conducono al cerchio sono maggiori bell' arco circolare, che resta tra i contatti.

3. Il piano è la minima di tutte le superficie che hanno gli stessi termini.

4. Se vi sieno due superficie comunque composte da altre superficie curve, o piane, ed esse sieno concave verso uno stesso piano, nel quale hanno comune il loro termine: di queste sarà sempre minore quella, ch' è compresa, tuttochè avesse coll' altra una parte comune.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se s' iscriva un poligono in un cerchio; il perimetro di questo poligono iscritto sarà minore della circonferenza del cerchio.

Ciò è chiaro; poichè ciascun lato di un tal po-
* pr. 1. ligono e minore dell' arco, che da esso è sotteso *.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se si circoscriva un poligono ad un cerchio; il perimetro di questo poligono circoscritto è maggiore della circonferenza del cerchio.

fig. 57. Al cerchio BFL vi si circoscriva il poligono AKGEC: dico che il perimetro di un tal poligono sia maggiore della circonferenza del cerchio.

Poichè le tangenti BA, AL sono maggiori
* pr. 2. dell' arco BL, ch' è tra i contatti *; e simil-

te le tangenti BC, CD sono maggiori dell' arco BD; le DE, EF maggiori dell'arco DF; le FG, GH maggiori dell'arco FH; e le HK, KL maggiori dell'arco HL: perciò l' intero perimetro del poligono è maggiore della circonferenza del cerchio . C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo , di cui un lato intorno all' angolo retto , rappresenti la circonferenza del cerchio , e l' altro sia uguale al raggio .

Sia il cerchio ABCD descritto col raggio OA, ed intorno al centro O; ed un lato XY, che comprende l'angolo retto in X del triangolo rettangolo ZXY , rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD , l' altro lato ZX sia uguale al raggio OA: dico che questo triangolo ZXY sia uguale al cerchio ABCD . *fig.* 58.

Poichè se il triangolo ZXY non è uguale al cerchio ABCD , dovrà pareggiare un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore . Suppongasi primieramente uguale ad un cerchio minore di ABCD, e sia questo l' altro , *abcd* descritto intorno allo stesso centro O. S'iscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCec. di un numero pare di lati uguali , il qual non tocchi il cerchio minore *abcd* : è chiaro , che se dal centro O si tirino i raggi ai vertici degli angoli di questo poligono ,

resterà esso diviso in tanti triangoli, quanti sono i suoi lati: e poichè le perpendicolari, che dal centro O si abbassano su i lati uguali del poligono iscritto nel cerchio, sono uguali *; perciò que' triangoli sa-
* 14. III. ranno tutti ugualmente alti; e quindi la somma loro, cioè il poligono, dovrà essere uguale ad un solo triangolo, che ha per base la somma delle basi di quelli, cioè il perimetro del poligono, e per altezza la OP, loro altezza comune. Adunque essendo la circonferenza del cerchio ABCD maggiore del perimetro del poligono AEBFCec iscritto in esso, si tagli dalla XY la X*y* uguale a questo perimetro, e similmente si prenda sulla XZ la X*z* uguale alla OP, ch' è minore del raggio OA, o sia di XZ, e poi si congiunga la *zy*: sarà il triangolo *z*X*y* uguale al poligono AEBFCec. Ma questo triangolo è minore dell'altro ZXY, che si è supposto pareggiare il cerchio *abcd*; quindi dovrà esser anche il poligono AEBFCec. minore di un tal cerchio. Lo che ripugna: poichè quel poligono comprende il cerchio ABCD. E perciò non può il triangolo ZXY esser uguale ad un cerchio minore di ABCD.

Or dico che nè anche possa quel triangolo ZXY pareggiare un cerchio GHKL maggiore di ABCD. Poichè se lo può, suppongasi quel cerchio descritto intorno allo stesso centro O, e s' iscriva in esso il poligono GMHNKec. di un numero pare di lati uguali, che non tocchi il cerchio minore ABCD. E poichè il perimetro di questo poligono è maggiore del perimetro di quell' altro simile ad esso, che si potrebbe circoscrivere al cerchio ABCD; e questo è maggiore della circonferenza del cerchio ABCD,

e quindi della XY; sarà perciò anche il perimetro del poligono GMHNKec. maggiore della XY. Ciò posto si prolunghi questa XY in T, finchè la XT sia uguale al perimetro del poligono GMHNKec.; e prolungata anche la XZ in R, finchè XR sia uguale alla perpendicolare OQ, che dal centro O si abbassa sopra un lato del poligono GMHNKec., la quale è maggiore del raggio OA, si congiunga RT: sarà il triangolo RXT uguale al poligono GMHNKec.. Quindi siccome il triangolo RXT è maggiore dell' altro ZXY, anche il poligono GMHNKec. dovrebbe esser maggiore del cerchio GHKL nel quale è iscritto. Lo che ripugna. Laonde neppur può il triangolo ZXY esser uguale ad un cerchio maggiore di ABCD. Ma quì sopra si è dimostrato, che non poteva quel triangolo pareggiare un cerchio minore dello stesso ABCD; dovrà perciò essere uguale a questo cerchio. C. B. D.

SCOL. I lati XY, *xy* dei due triangoli ZXY, *z*X*y* rettangoli in X, rappresentino le circonferenze di due cerchi, e gli altri due lati XZ, *xz*, che sono anche intorno all' angolo retto, sieno rispettivamente uguali ai raggi degli stessi cerchi; saranno essi triangoli ZXY, *z*X*y*, uguali ai cerchi de' raggi XZ, X*z* *: e quindi siccome questi cerchi sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o pur de' raggi XZ, X*z* *; perciò dovrà anche stare il triangolo ZXY al triangolo *z*X*y* come il quadrato di XZ a quello di X*z*. Ma i triangoli ZXY, *z*X*y* sono rispettivamente le metà dei rettangoli di ZX in XY, e di *z*X in X*y*; quindi sarà pure il rettan-

* 3.

* 2.XII

golo di ZX in XY a quello di zX in Xy, come il quadrato di ZX a quello di zX; e permutando starà il rettangolo di ZX in XY al quadrato di ZX, come il rettangolo di zX in Xy al quadrato di zX, cioè starà XY a ZX, come Xy a
* 1. VI. zX *; e di nuovo permutando XY ad Xy, come ZX a zX. Vale a dire

Le circonferenze de' cerchi sono tra loro come i raggi.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se in un cono s' iscriva una piramide a base equilatera; la superficie di questa piramide, senza la base, è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui un lato intorno all' angolo retto sia uguale al perimetro della base della piramide, e l' altro lato sia quanto l' altezza di uno de' triangoli uguali, che formano la detta superficie.

fig. 59. Sia il cerchio BAC la base di un cono, e'l rettilineo equilatero BAC iscritto in questo cerchio dinoti la base della piramide iscritta nel cono; e sia inoltre il triangolo rettangolo EFG, di cui un lato FG intorno all' angolo retto è uguale al perimetro del rettilineo BAC, e l' altro lato FE è quanto l' altezza di uno de' triangoli uguali, che contengono quella piramide: dico che questo triangolo EFG pareggi la superficie della piramide, senza la base.

Poichè sono uguali i lati del rettilineo ABC; perciò i triangoli che contengono la piramide saranno perfettamente uguali; e per conseguenza avranno anche uguali le loro altezze, e ciascuna di queste verrà rappresentata dalla FE. Laonde se la FG si divida nelle FH, HK, KG uguali alle AB, BC, CA, e si congiungano le EH, EK; i triangoli FEH, HEK, KEG avendo la stessa altezza di quelli, che contengono la piramide, gli saranno uguali: e perciò la somma di questi, cioè la superficie della proposta piramide, senza la base, dovendo pareggiare la somma di quelli, sarà uguale al triangolo EFG. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se i punti ne' quali due lati di un cono incontrano la circonferenza della sua base si uniscano con una linea retta; n' emergerà un triangolo, che sarà minore della superficie conica ch' ei sottende.

N. B. Chiamasi *lato* del cono l' ipotenusa del triangolo rettangolo generatore di questo solido, qualunque sia il luogo, ov' ella si ritrovi in una tal genesi. E lo stesso potrà dirsi del *lato* del cilindro nella Propos. seguente.

Sieno DA, DC due lati del cono BACD, ed i punti A, C ne' quali essi incontrano la circon- *fig.* 60.

ferenza BAC si congiungano colla AC: dico che il triangolo ADC sia minore della superficie conica, ch' ei sottende.

Sia una tal superficie quella, ch' è rappresentata dalla ABCD. Si seghi l' arco ABC per metà in B, e si uniscano le AB, BC, DB: saranno i due triangoli ABD, BCD maggiore del triangolo ADC (*).

---

fig. 61. (*) „ Imperocchè se si costituiscano al centro *d* » del cerchio *acb* descritto col raggio *da* uguale a » DA, i tre angoli *adb*, *bdc*, *cde* uguali rispettiva- » mente ai tre altri angoli ADB, BDC, CDA; è » chiaro, che il punto *e* non potrà cadere in *a*; » poichè altrimenti i tre angoli *adb*, *bdc*, *cde*, e » quindi i loro uguali in D formerebbero quattro
* 21.XI. » retti *. Laonde l' arco *ce* sarà minore dell' arco » *cea*. Ma l'arco *ce* è anche minore dell'arco *cba*; » poichè i due angoli *cdb*, *bda* sono maggiori dell'
* 20.XI. » angolo *cde* *: adunque la corda *ca* dev' esser » maggiore della corda *ce*. Or si congiungano le » *ab*, *bc*, *ce*, e la *bd* incontri la *ca* in *m*, gli dovrà » essere perpendicolare: e perciò i due triangoli » *bdc*, *bda*, che sono uguali, pareggeranno insie- » me presi il rettangolo di *bd*, loro base comune, in » *cm*, altezza di uno di essi. E se si abbassi da *d* » sopra *ce* la perpendicolare *dn*, il triangolo *dce*, » ch' è doppio dell' altro *dnc*, sarà anche uguale » al rettangolo di *dn* base comune alle sue due » metà *ndc*, *nde* in *nc* altezza di una di que- » ste. Per lo che siccome *cm* si è dimostrata mag- » giore di *cn*, e che *db* è maggiore di *dn*; il primo » de' detti rettangoli sarà maggiore dell' altro;

Si supponga esser H l' eccesso di quei due triangoli su di questo ; sarà H o minore dei segmenti circolari AEB, BFC, o pure non minore.

Sia in primo luogo non minore. E poichè la superficie BAED composta dalla superficie conica AEBD, e dal segmento circolare AEB ha gli stessi termini, che il triangolo ABD, sarà essa maggiore di questo triangolo * . Similmente l' altra superficie BCFD composta dalla superficie conica BFCD, e dal segmento BFC è maggiore del triangolo BDC: e perciò l' intera superficie conica ABCD insieme coi segmenti circolari AEB, BFC è maggiore dei triangoli ADB, BDC. Ma si è supposto, che lo spazio H sia non minore di quei segmenti circolari; quindi la superficie conica ABCD insieme collo spazio H è maggiore dei triangoli ADB, BDC, e perciò anche del triangolo ADC insieme collo spazio H, la qual somma s' era supposta uguale a quelli triangoli . Laonde, toltone di comune lo spazio H ; sarà la rimanente superficie conica ABCD maggiore del triangolo ADC.

* pr. 3.

Sia adesso lo spazio H minore dei segmenti circolari AEB, BFC. Si dividano per metà gli archi AB, BC in E, F, e si uniscano le AE, EB, BF, FC ; sarà ciascuno dei triangoli AEB, BFC maggiore della metà del segmento circolale nel quale consiste: poi chè se si tirino per gli punti, E, F le tan-

» cioè i due triangoli *cdb*, *bda*, o i loro uguali
» CDB, BDA saranno maggiori del triangolo *cde*,
» o dell' uguale CDA. Come si è qui sopra as-
» sunto.

genti al cerchio, e si compiano i parallelogrammi sulle AB, BC; ogni triangolo di quelli è la metà di ciascuno di questi parallelogrammi, ch'è maggiore del segmento circolare al quale è circoscritto: che perciò se si continui a dividere in due parti uguali le metà degli archi AB, BC, dovrà finalmente pervenirsi a dei segmenti circolari minori dello spa-
l. 1. XII. zio H; sieno questi quelli che insistono sulle linee rette AE, EB, BF, FC, e si uniscano le DE, DF. E poichè la superficie EAGD composta dalla superficie conica AGED, e dal segmento circolare AGE è maggiore del triangolo ADE; e che l'altra superficie BEMD è maggiore del triangolo EDB; sarà perciò tutta la superficie MBEAGD, che componesi dalla superficie conica AEBD, e dai segmenti circolari AGE, EMB maggiore dei triangoli ADE, EBD. E quindi essendo i triangoli AED, DEB maggiori del triangolo ABD; sarà molto più la superficie MBEAGD, maggiore del triangolo ADB. Per la stessa ragione, anche la superficie KBFCLD è maggiore del triangolo BDC. Quindi le due superficie MBEAGD e KBFCLD, cioè la superficie conica ABCD, insieme coi segmenti circolari AGE, EMB, BKF, FLC sarà maggiore dei triangoli ABD, DBC. Ma questi triangoli sono uguali al triangolo ADC insieme collo spazio H; e quei segmenti, che abbiamo nominati, sono minori di esso spazio H: perciò la rimanente superficie conica ABCD è maggiore del triangolo ADC. C. B. D.

COR. Quindi *se s' iscriva in un cono una piramide; la superficie di questa è minore della superficie del cono, non considerandovi le loro basi.*

Poichè ciascuno dei triangoli, che comprendono la piramide è minore della superficie conica, che esso sottende.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se al cerchio ch' è base di un cono si tirino due tangenti, le quali si incontrino fra loro; i triangoli, che avranno per basi queste tangenti, e per vertice quello del cono saranno maggiori della superficie conica, che da essi si comprende.

Sia il cerchio ACB la base di un cono, che ha per vertice il punto E; e ad un tal cerchio si tirino le due tangenti AD, CD, le quali s' incontrino in E, e si uniscano le AE, DE, EC: dico che i triangoli AED, DEC sieno maggiori della superficie conica ABCE contenuta dai lati AD, DC del cono, e dall' arco ABC. *fig.* 62.

Si divida quest'arco ABC per metà in B, e per B si tiri al cerchio ACB la tangente GBF, la quale incontri le AD, DC in G, F; sarà questa tangente parallela alla corda AC tirata fra i contatti A, C: finalmente si congiungano le EF, EG. E poichè le FD, DG sono maggiori di FG, aggiuntevi di comune le AG, CF, saranno le AD, DC maggiori delle AG, GF, FC. Or la tangente AD è perpendicolare al raggio AO del cerchio ACB, e questo raggio è la comune sezione di un tal cerchio, ch' è base del cono, e del triangolo AOE,

che lo descrive; che perciò la DA dovrà esser
d.4.XI. perpendicolare al piano del triangolo AOE, e quindi alla AE, che esiste in un tal piano: e similmente si dimostrerà, che ogn' altro lato EB, EC del cono sia perpendicolare alla tangente il cerchio ACB nel suo estremo B, C. Quindi i triangoli EAD, ECD, AEG, GEF, FEC hanno tutti la stessa altezza, cioè il lato del cono; e perciò i due primi staranno agli altri tre, come AD, DC ad AG, GF, FC; la qual cosa si dimostra facilmente. Per lo che essendo le AD, DC maggiori delle AG, GF, FC, saranno anche i triangoli AED, DEC maggiori dei triangoli AEG, GEF, FEC. Dinoti lo spazio H l'eccesso di quei due primi triangoli su questi tre altri: potrà H esser minore de' trilinei AGB, BFC, compresi dalle tangenti AG, GF, FC, e dagli archi circolari AB, BC tra i contatti, o pur non minore.

Sia primieramente H non minore di questi trilinei. E poichè i triangoli AEG, GEF, FEC, ed il quadrilatero AGFC compongono una superficie; e questa, e l'altra superficie, che si compone dalla superficie conica ABCE, e dal segmento circolare ABE hanno gli stessi termini nel piano AEC, cioè i lati del triangolo AEC, e sono entrambe rivolte colla loro concavità verso questo piano; perciò sarà quella prima superficie
* pr. 4. maggiore della seconda *. Laonde toltone di comune il segmento circolare ABC resterà la somma dei triangoli AEG, GEF, FEC, e de' trilinei AGB, BFC maggiore della superficie conica ABCE.

Ma lo spazio H si è supposto non minore de' trilinei AGB, BFC; dunque sarà anche la somma di quei tre triangoli, e dello spazio H maggiore della superficie conica ABCE; e perciò siccome quei tre triangoli insieme collo spazio H erano uguali ai due triangoli AED, DEC; così anche questi saranno maggiori della superficie conica ABCE.

Chè se lo spazio H si supponga minore de' trilinei AGB, BFC; si biseghino gli archi AB, BC nei punti K, L, per gli quali si tirino al cerchio ACB le tangenti MN, XR; queste taglieranno da essi trilinei AGB, BFC i triangoli MGN, XFR, che ne sono più che la metà. Imperocchè se congiungasi AK, essendo AM uguale ad MK, ed MK minore di MG, sarà anche AM minore di MG, e quindi il triangolo GKM essendo maggiore dell'altro MKA *, è molto più che la metà del trilineo GKA; e così pure dimostrando, che il triangolo GKN sia più che la metà del trilineo GKB, ne segue che l'intero triangolo MGN sia più che la metà del trilineo AGB: e similmente si dimostra che il triangolo XFR sia più che la metà del trilineo BFC. Se dunque si continuino a dividere per metà gli archi AK, KB, BL, LC, e si tirino le tangenti al cerchio ACB, si dovrà pervenire finalmente a de' trilinei minori dello spazio H *. Sieno questi i trilinei AMK, KNB, BXL, LRC, e si congiungano le ME, NE, XE, RE. Si dimostrerà come poc' anzi, che i triangoli AEG GEF, FEC sieno maggiori dei triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC; poichè le basi AG, GF, FC di quelli, insieme prese, sono maggiori

* 1. VI.

* I. 1. XI

della somma delle basi AM, MN, NX, XR, RC di questi, e l'altezza loro comune è il lato del cono: e che la superficie composta dai triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC, e dal rettilineo AMNXRC, avendo gli stessi termini nel piano AEC coll'altra superficie composta dal segmento circolare ABC, e dalla superficie conica ABCE, e comprendendola, ne sia maggiore. Che perciò togliendone di comune il segmento circolare ABC, resteranno i triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC insieme co' trilinei AMK, KNB, BXL, LRC maggiori della superficie conica ABCE. Ma quei trilinei si erano supposti minori dello spazio H; quindi anche la somma dei triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC, e di H, cioè i triangoli AEG, GEF, FEC, presi insieme, saranno maggiori della superficie conica ABCE. E finalmente dovrà molto più la somma de' due triangoli AED, DEC, che sono maggiori dei triangoli AEG, GEF, FEC, esser maggiore della stessa superficie conica ABCD. C.B.D.

COR. Si rileva da ciò, che *la superficie di una piramide circoscritta ad un cono, sia maggiore della superficie del cono, non considerando le loro basi*.

Poichè si è dimostrato, che i due triangoli che hanno per basi le tangenti il cerchio base del cono, le quali s'incontrano, e per vertice quello del cono sono maggiori della superficie conica, che resta tra essi. E così continuandosi a dimostrare, se ne conchiuderà ciò che si è enunciato.

Di più, che *se vi sia un'altra piramide la qua-*

le abbia anche per vertice quello del cono, e per base un poligono simile a quello, ch' è base della piramide circoscritta al cono, e maggiore di esso; la superficie di quest' altra piramide, sarà pure maggiore di quella del cono, non considerandovi le loro basi.

Poichè è chiaro, che ciascun triangolo di questa seconda piramide è maggiore del corrispondente nella prima, per averne la base, e l' altezza maggiore.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se si congiungano gli estremi corrispondenti di due lati di un cilindro, n' emergerà un quadrilatero minore della superficie cilindrica, ch' esso sottende.

Sia il cerchio AEB la base di un cilindro, e CFD il piano opposto ad esso. Sieno inoltre AC, BD due lati di questo solido, ed AB, CD le congiungenti i loro termini corrispondenti: dico che il quadrilatero ABCD sia minore della superficie cilindrica AEBDFC, ch' esso sottende. *fig.* 63.

Si dividano per metà i due archi AB, CD nei punti E, F; e si uniscano le AE, EB, CF, FD. E poichè le AC, BD sono uguali, e parallele all' asse del cilindro, saranno uguali, e parallele tra loro; e perciò la figura ABDC è un parallelogrammo, il quale è chiaro che sia rettan-

golo, ed abbia la stessa altezza del cilindro: e similmente si dimostra, che sieno parallelogrammi rettangoli le figure AF, FB, e che abbiano per loro altezza quella del cilindro. Laonde i tre rettangoli AF, FB, AD sono ugualmente alti; e perciò staranno i due rettangoli AF, FB, presi insieme, all' altro AD, come AE, EB ad AB. Ma la somma delle AE, EB è maggiore di AB: adunque anche i rettangoli AF, FB saranno maggiori del rettangolo AB. Dinoti lo spazio H l'eccesso di quelli su questo: sarà un tale spazio H o minore dei segmenti circolari AGE, EKB, CLF, FMD, o pur non minore.

Sia primieramente non minore. E poichè la superficie GEACFL composta dalla superficie cilindrica, ch' è tra le CA, FE, e dai segmenti circolari AGE, CLF è maggiore del rettangolo ACFE con cui ha gli stessi termini*, cioè le linee rette AC, CF, FE, EA: e che similmente l'altra superficie KEBDFM è maggiore del rettangolo EBDF; perciò le due superficie GEACFL, KEBDFM, prese insieme, cioè la superficie cilindrica AEBDFC, ch' è sottesa dal rettangolo ABDC, insieme coi segmenti circolari AGE, EKB, CLF, FMD sarà maggiore dei rettangoli AF, FB. Ma questi rettangoli sono uguali all' altro ACDB insieme collo spazio H: quindi la superficie cilindrica AEBDFC insieme con quei segmenti circolari, sarà maggiore del rettangolo ACDB insieme con H. È poi H maggiore dei segmenti circolari; perciò dovrà quella rimanente superficie cilindrica esser maggiore del rettangolo ACDB.

* pr. 3.

Sia ora lo spazio H minore di quei segmenti circolari. Si divida per metà ciascun arco AE, EB, CF, FD; poi le loro metà dividansi anche in due parti uguali, e ciò si continui a fare, finchè vi restino dei segmenti circolari minori dello spazio H *: sieno questi quelli, che insistono sulle linee rette AG, GE, EK, KB, CL, LF, FM, MD. Dimostreremo, come nella parte precedente, che i rettangoli AL, GF, EM, MB sieno maggiori degli altri AF, FB; e che le superficie cilindriche, che sono comprese tra i lati AC, GL; GL, EF; EF, KM; KM, BD insieme coi segmenti circolari, che hanno per corde le AG, GE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, cioè l' intera superficie cilindrica, ch' è tra le AC, BD insieme con quei segmenti circolari, sia maggiore dei rettangoli AL, GF, EM, MB, e quindi anche degli altri AF, FB, ossia del rettangolo ACDB insieme collo spazio H. Per lo che essendo quei segmenti circolari minori dello spazio H: dovrà la rimanente superficie cilindrica AEBDFC esser maggiore del rettangolo ACDB. C. B. D. *l.1.XII.

Cor. Quindi *se s' iscriva un prisma in un cilindro; la superficie del prisma è minore della superficie del cilindro, non considerandovi le loro basi.*

Imperocchè ciascun parallogrammo, che compone la superficie del prisma, è minore della superficie cilindrica, ch' è costituita su di esso.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se per gli estremi di due lati di un cilindro, si tirino le tangenti ai cerchi, che sono le basi di questo solido, le quali s' incontrino fra loro: unendo questi punti di concorso n' emergeranno due rettangoli maggiori della superficie cilindrica compresa tra essi.

fig. 64. Sia il cerchio ACB una delle basi di un cilindro, e CG, AE sieno due suoi lati: per gli estremi A, C, E, G de' quali sieno tirate ai cerchi ACB, EGF, basi del cilindro, le tangenti AD, CD; EH, GH, che s' incontrino fra loro in D, ed H; e questi punti si uniscano colla DH: dico che i quadrilatari DCGH, DAEH sieno due rettangoli, i quali insieme presi sono maggiori della superficie cilindrica, ch' essi comprendono, cioè di quella, ch' è terminata dai lati EA, GC, e dagli archi ABC, EFG.

Si tirino le AC, EG fra i contatti. E poichè le EH, AD sono perpendicolari al lato AE del cilindro, esse saranno tra loro parallele; e per la stessa ragione sono anche parallele le GH, CD. Laonde l' angolo EHG è uguale all' angolo ADC; e perciò i triangoli isosceli EHG, ADC, avendo uguali le loro basi AC, EG, ed il loro angoli verticali, e quindi quelli che sono adjacenti alle basi, saranno perfettamente

uguali. Adunque EH è uguale ad AD: ma gli era pure parallela, perciò il quadrilatero ADHE è un parallelogrammo: e lo stesso può dirsi dell' altro DCGH; ed è poi chiaro, ch' essi sieno rettangoli ugualmente alti, che il cilindro. Ciò posto, si biseghino gli archi ABC, EFG in B, F, e per questi punti si tirino ai cerchi ACB, EGF le tangenti KBL, IFM, e si congiungano le IK, LM. Si dimostrerà come poc' anzi, che i quadrilateri EAKI, IKLM, LMGC sieno rettangoli: e siccome le basi DA, DC de' duo rettangoli DE, DG sono maggiori delle basi AK, KL, LC de' tre altri rettangoli KG, KM, LG; perciò que' due saranno maggiori di questi tre. Sia lo spazio O l' eccesso di quelli su questi; sarà questo spazio O o minore dei trilinei CLB, BKA, GMF, FIE, o pur non minore.

Sia in primo luogo non minore. E poichè la superficie, che si compone dai tre rettangoli AI, IL, LG, e dai quadrilateri EIMG, AKLC ha gli stessi termini nel piano EACG coll' altra superficie, che si compone dalla superficie cilindrica, ch' è tra i lati EA, GC del cilindro, e gli archi EFG, ABC, e dai segmenti circolari EFG, ABC; e che di più la prima, e la seconda sono entrambe concave verso un tal piano EAGG, e quella comprende questa; perciò la prima sarà maggiore della seconda *. Laonde togliendone di comune i segmenti circolari ABC, EFG, resteranno i tre rettangoli AI, KM, LG insieme co' trilinei EIF, FMG, AKB, BLC maggiori della superficie cilindrica, ch' è racchiusa

* *pr.* 4.

dalle EA, GC, e dagli archi EFG, ABC. Ma lo spazio O si è supposto non minore di quei quattro trilinei; quindi sarà anche la somma dei tre rettangoli AI, KM, LG, e di O maggiore della stessa superficie cilindrica: e siccome quei tre rettangoli insieme con O, pareggiavano i due rettangolii DE, DG; così saranno anche questi maggiori della superficie cilindrica ABCGFE.

Che se lo spazio O si supponga minore de' trilinei AKB, BLC, EIF, FMG; allora si biseghino continuamente gli archi AB, BC, EF, FG, e si tirino ad essi le tangenti, finchè si pervenga a de' trilinei minori dello spazio O; e poi il resto della dimostrazione si continui, come nella Prop. 7.

Cor. Quindi si rileva che la *superficie di un prisma circoscritto ad un cilindro sia maggiore della superficie del cilindro, non considerandovi le loro basi*.

Poichè si è dimostrato, che due rettangoli, che toccano un cilindro, ed hanno da una parte un lato comune, e dall'altra sono terminati da due lati del cilindro, sono maggiori della superficie cilindrica ch' essi comprendono; e così continuando a dimostrare, se ne conchiuderà ciò che si è detto.

Di più la *superficie di un altro prisma ugualmente alto, che comprende quello, che tocca il cilindro, e che ha per basi de' rettilinei simili a quelli che sono basi del primo, sarà anche maggiore della superficie cilindrica*.

Poichè ciascun rettangolo, che termina questo secondo prisma è maggiore del corrispondente, che termina il primo; mentre la base è maggiore della base, e l' altezza è la stessa,

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

La superficie di un cilindro senza le basi, è uguale al rettangolo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza della base di un tal cilindro, e da un suo lato.

Il cerchio ABCD dinoti la base di un cilindro, il cui asse sia OV, che dinoterà anche un qualunque lato di un tal cilindro; e sia il rettangolo ZY contenuto da XY, che rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD, e da ZX uguale ad OV: dico che questo rettangolo sia uguale alla superficie del cilindro senza le basi. *fig.* 65.

Poichè se il rettangolo ZY non è uguale alla superficie del cilindro, che ha per base il cerchio ABCD, e per asse OV; dovrà pareggiare la superficie di un cilindro descritto collo stesso asse, e che abbia per base un cerchio minore del cerchio ABCD, o pur maggiore. Pareggi in primo luogo quella del cilindro, la cui base è il cerchio *abcd* minore di ABCD, e concentrico. S'iscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCec. di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *abcd*, e poi s'intenda eretto su di questo poligono un prisma dell'altezza del cilindro. E poichè il perimetro di un tal poligono è minore della circonferenza del cerchio ABCD *, la quale si è rap- * *p.* 1.

presentata colla retta XY, si tagli da questa la Xy uguale a quel perimetro, e si compia il rattangolo Zy: sarà questo rettangolo, com' è chiaro, uguale alla superficie di quel prisma; e perciò maggiore della superficie del cilindro de-
* c. p. 8. scritto sul cerchio *abcd**, e quindi anche del rettangolo ZY, che si è supposto uguale a questa superficie cilindrica. Lo che ripugna. Non può dunque il rettangolo ZY pareggiare la superficie di un cilindro, che abbia lo stesso asse OV del proposto, ed una base minore del cerchio ABCD.

Sia dunque un tal rettangolo ZY uguale alla superficie di un altro cilindro anche descritto collo stesso asse OV, ed avente per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD, e concetrico. S'intenda similmente iscritto in questo cerchio GHKL un poligono GMHNKec. di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi l'altro cerchio ABCD; e su di esso si eriga poi un prisma dell'altezza OV, che verrà ad essere iscritto in quel cilindro. Ciò posto, essendo il perimetro del poligono GMHNKec. maggiore della circonferenza del cerchio ABCD, e perciò anche della retta XY, che la rappresenta; si produca la XY in T finchè XT pareggi un tal perimetro, e compiasi il rettangolo ZT; sarà, come è chiaro, un tal rettangolo uguale alla superficie di quel prisma; e quindi minore della superficie del cilindro descritto sul cerchio
* c. p. 7. GHKL*, e perciò anche del rettangolo ZY, che si è supposto uguale a questa. Lo che anche è un assurdo.

Laonde non potendo il rettangolo ZY, contenu-

to dalla linea retta XY, che rappresenta la circonferenza del cerchio ABCD, e dall' altra ZX ch' è quanto la OV, esser uguale alla superficie di un cilindro descritto coll' asse OV, la cui base sia un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore; dovrà necessariamente pareggiare quella del cilindro di questa base C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

La superficie di un cilindro senza le basi sta ad una di queste, come il doppio lato del cilindro al raggio di una sua base.

Sia un cilindro che abbia per asse la linea retta AC, ed AE esprima il raggio della sua base: dico che debba stare la superficie del cilindro ad uno dei cerchi, che ne sono le basi, come la doppia AC ad AE. fig. 60.

La linea retta AB rappresenti la circonferenza del raggio AE, ed essa si applichi perpendicolarmente alla AC nel suo estremo A, e si compia il rettangolo CB; sarà questo uguale alla superficie del cilindro *; e se congiungasi AE, il triangolo rettangolo EAB sarà uguale al cerhcio ch' è la base di esso cilindro *. Or se si prolunghi AC finchè AD ne sia doppia, e si congiunga BD; è chiaro che il triangolo BAD pareggiando il rettangolo CB, sia al par di questo uguale alla superficie del proposto cilindro. Ma il triangolo DAB sta al

* p. 9.
* p. 3.

triangolo EAB, come DA ad EA, cioè come il doppio di CA ad EA. Dunque è vero, che la superficie del cilindro, che ha per asse CA, e per base il cerchio del raggio EA sta a questo cerchio, come il doppio dell' asse, ossia di un lato del cilindro, al raggio della base. C. B. D.

SCOL. Fra CA, che dinota il lato del cilindro, e la doppia AE, ch' è il diametro della base si ritrovi la media proporzionale M; sarà il quadrato di M uguale al rettangolo di CA nella doppia AE, e perciò anche all'altro della doppia CA, cioè DA, in AE; giacchè questi due rettangoli sono uguali, per aver le basi reciprocamente proporzionali alle altezze: e perciò sarà anche DA ad M, come M ad AE, ossia come il cerchio del raggio M all' altro del raggio AE*. E quindi, poichè AD sta ad AE, come il triangolo DAB al triangolo EAB, starà anche quel triangolo a questo, come il cerchio del raggio M a quello del raggio AE. Ma il cerchio del raggio AE è uguale al triangolo EAB, poichè la AB rappresenta la circonferenza di esso, e la AE è quanto il raggio*. Dunque anche il triangolo DAB dovrà pareggiare l' altro cerchio del raggio M. Ma quel triangolo si è detto essere uguale alla superficie del cilindro. Adunque

* sc.p.3.

p. 3.

La superficie di un cilindro, senza le basi, è uguale al cerchio il cui raggio è la media proporzionale tra 'l lato di un tal cilindro e 'l diametro della sua base.

E questa è l' esibizione della superficie di un cilindro secondo Archimede.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

La superficie di un cono, senza la base, è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui i lati intorno all' angolo retto, uno rappresenti la circonferenza della base di un tal cono, e l' altro sia quanto un lato di questo solido.

Sia il cerchio ABCD la base di un cono, ed OV il suo asse, VB un suo lato; e sia il triangolo rettangolo ZXY, di cui un lato XY intorno all' angolo retto rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD, l'altro XZ sia quanto VB: dico che questo triangolo debba pareggiare la superficie del cono ABCDV. *fig.* 67.

Poichè se un tal triangolo non è uguale alla superficie di questo cono; potrà supporsi pareggiar quella di un altro cono descritto collo stesso asse, e che abbia per base un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore. Sia primieramente uguale alla superficie di quel cono, che ha l' asse stesso OV, e per base il cerchio *abcd*, minore dell' altro ABCD, e descritto intorno allo stesso centro O. S' iscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCec., di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *abcd**; e poi s' intenda su di questo poligono eretta la piramide, che ha per vertice il punto V, la quale verrà ad essere iscritta nel cono ABCDV. Di poi *1.2.XII.

dal vertice V di questa piramide su di un lato EB della sua base si abbassi la perpendicolare VP, che sarà minore, com' è chiaro, del lato VB del cono; e si taglino dalle XY, XZ, le Xy, Xz rispettivamente uguali al perimetro del poligono AEBFCec., ed alla VP, e si congiunga la zy: sarà il triangolo zXy uguale alla superficie della pi-
* p. 4. ramide AEBFCec.V *. Or la superficie di questa piramide è maggiore di quella del cono *abcd*V
* c. p. 6. ch' essa comprende *; e si è supposto che questa superficie conica pareggi il triangolo ZXY: adunque dovrebb' essere il triangolo zXy maggiore dell' altro ZXY. Lo che ripugna. Non può dunque il triangolo ZXY pareggiare la superficie di un cono descritto coll' asse OV, e che abbia per base un cerchio minore di ABCD.

Sia dunque un tal triangolo ZXY uguale alla superficie di un altro cono GHKLV, che abbia lo stesso asse OV, e la cui base GHKL sia un cerchio maggiore di ABCD, e concentrico. S' iscriva nel cerchio maggiore GHKL un poligono GMHNKec. di un numero pare di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore ABCD, e sopra un tal poligono s' intenda eretta la piramide, che ha per vertice il punto V, la quale essendo iscritta nel cono GHKLV, avrà una su-
* c. p. 5. perficie minore di quella di un tal cono *, cioè del triangolo ZXY. Ciò posto, dal vertice V di questa piramide si abbassi su di un lato MH della sua base la perpendicolare VQ, che sarà, com' è chiaro, maggiore di VB lato del cono ABCDV; e si prolunghino le XY, XZ in T, ed in R, finchè

XT pareggi il perimetro del poligono GMHNKec. il quale è maggiore della circonferenza ABCD, lo che può dimostrarsi come nella Prop. 3., e la XR pareggi la VQ: congiunta RT, sarà il triangolo RXT uguale alla superficie di una tal piramide, e perciò minore del triangolo ZXY. Lo che anche ripugna. Quindi il triangolo ZXY nè pure può essere uguale alla superficie di un cono, che abbia l' asse OV, e per base un cerchio maggiore di ABCD. Ma si è dimostrato, che un tal triangolo nè anche poteva pareggiare la superficie di un cono il quale avesse per asse OV, e per base un cerchio minore di ABCD. Adunque dovrà quel triangolo essere uguale alla superficie del cono ABCDV. C. B. D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

La superficie di un cono, senza la base, serba a questa la stessa ragione, che un lato di un tal cono al raggio della base.

Sia un cono, che abbia per lato la linea retta AC, ed AE esprima il raggio della sua base: dico che debba star la superficie di questo cono, senza la base, ad essa base, come AC ad AE. *fig. 66.*

Rappresenti la linea retta AB la circonferenza del raggio AE, ed essa si applichi perpendicolarmente alla AB, e si congiungano le DB, BE; saranno i triangoli DAB, EAB rispettivamente uguali

alla superficie del cono *, ed a quella della base
* p. 11. di esso *. E quindi siccome questi due triangoli
* p. 3. sono tra loro, come AD ad AE; così sarà anche la superficie di quel cono alla sua base, come AD ad AE, cioè come un lato del cono al raggio della sua base. C. B. D.

SCOL. Tra il lato AD di un cono, ed il raggio AE della sua base si trovi la media proporzionale M, starà AD ad AE in duplicata ragione di M ad AE, cioè come il cerchio del raggio M a quello, che ha AE per raggio. Ma AD sta ad AE, come il triangolo DAB all' altro EAB: quindi anche quel triangolo starà a questo, come il cerchio del raggio M all' altro, che ha AE per raggio. È poi
* p. 3. il cerchio del raggio AE uguale al triangolo AEB *. Dunque il cerchio del raggio M sarà uguale al triangolo DAB, cioè alla superficie di quel cono ch'era rappresentata da questo triangolo. Adunque *La superficie di un cono, senza la base, è uguale al cerchio, che ha per raggio la media proporzionale tra il lato di esso cono, e'l raggio della sua base.*

E questa è la maniera nella quale ha Archimede esibita una tal superficie conica.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base; la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli, sarà uguale al rettangolo contenuto da quella parte del lato del cono, ch' è tra i piani sudetti,

e da un' altra linea retta, che rappresenti la somma della metà della circonferenza della base del cono, e della metà del perimetro della sezione prodotta dal piano segante.

Sia un cono ABCD descritto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo DOC intorno al suo lato DO, ed esso cono sia segato dal piano EFG parallelo alla base ABC: dico che la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli ABC, EFG sia uguale al rettangolo contenuto dalla GC, e da un' altra linea retta, ch'è uguale alla somma della metà della circonferenza ABC, e della metà del perimetro della sezione EFG. fig. 68.

Dal punto C si elevi CH perpendicolare al lato DC del cono, ed uguale alla circonferenza del cerchio ABC; poi si congiunga DH, e per G si tiri GK parallela a CH. E poichè i piani paralleli ABC, EFG sono segati dal piano DOC, le loro comuni sezioni con questo, cioè le PG, OC saranno parallele *; e quindi l' angolo DPG è retto al pari del suo interno, ed opposto DOC; e perciò il triangolo DPG rivolgendosi intorno a DP descrive un cono, e PG descrive il cerchio, che n' è base: laonde la sezione EFG è un cerchio. Or essendo simili i triangoli DOC, DPG sta, permutando, OC a PG, come CD a DG: ma CD sta a DG, come CH a GK, per gli altri triangoli simili DCH, DGK; quindi sarà pure CH a GK, come OC a PG, o come la circonferenza del raggio OC a quella del raggio PG *: e perciò essendosi supposta CH uguale alla cir- * 16. XI.

conferenza del raggio OC, sarà anche GK uguale alla circonferenza del raggio PG. Ciò premesso il triangolo DCH è uguale alla superficie del
* p. 11. cono ABCD *; ed il triangolo DGK è uguale alla superficie dell' altro cono EFGD: adunque sarà la differenza di quei due triangoli, cioè il trapezio CGKH uguale alla differenza delle due superficie coniche, cioè alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli ABC, EFG. Ma se si tiri per K la KL parallela alla DC, e si unisca CK; è chiaro che il trapezio CGKH essendo uguale ai due triangoli CKH, CGK, sia quanto la somma dei rettangoli della metà di CH in LK, o CG, e della metà di GK in CG; e quindi uguale al rettangolo di CG nella metà di CH, e GK. Ma queste CH, e GK rappresentano le circonferenze dei cerchi ABC, EFG. Dunque la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli ABC, EFG è uguale al rettangolo di CG nella metà della somma delle circonferenze dei cerchi ABC, EFG. C. B. D.

Cor. Si divida PO per metà di N, si tiri per N la NM parallela ad OC, ed indi poi per G si tiri GQ parallela a PO; sarà per gli triangoli simili GQC, GRM, e, permutando, QG a GR, come QC ad RM, e perciò QC doppia di RM. Ma le OQ, PG, prese insieme, sono il doppio di NR; dunque le OC, PG saranno il doppio di NM: e quindi la circonferenza del raggio NM rappresenterà la metà della somma delle circonferenze dei raggi
* c. p. 3. OC, PG *. E perciò

La superficie conica, ch' è tra i piani paralleli sarà uguale al rettangolo contenuto dalla GC, ch' è

la parte del lato del cono, ch' è tra essi piani, e dalla circonferenza di quel cerchio, che ha per raggio la NM, che dal punto medio della PO si tira parallela alla PG, o alla OC.

Scol. Or se si ritrovi tra CG, ed il doppio della NM, cioè le OC, PG insieme, la media proporzionale X; dovrà il quadrato di X pareggiare il rettangolo di CG nella doppia MN, e quindi quello della doppia CG in MN; i quali rettangoli sono uguali, per aver le basi reciprocamente proporzionali alle altezze. Laonde sarà la doppia CG ad X, come X ad MN, o come la circonferenza del raggio X all' altra, che ha MN per raggio * : e quindi se si costituissero due triangoli rettangoli, uno dei quali abbia per lati intorno all' angolo retto il doppio di GC, e la circonferenza del raggio MN, e l' altro la X, e la circonferenza del raggio X; questi due triangoli dovrebbero essere uguali *. Ma il primo di essi triangoli, avvegnachè uguale al rettangolo di GC nella circonferenza del raggio MN, pareggia la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli * : e l' altro è uguale al cerchio del raggio X *. E perciò

* c.p.3.

* 15.VI.

* p. 3.

* c.p.13.

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base, la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli, è uguale a quel cerchio, il cui raggio è la media proporzionale tra il doppio lato del cono, ch' è tra questi piani, ed una linea retta uguale ai raggi de' due cerchi, che sono in essi.

Ed è in questo modo, che Archimede ha esibita la superficie conica, di cui si è parlato.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Ogni cono è uguale ad una piramide, la quale abbia per base un rettilineo uguale al cerchio base del cono, e la stess' altezza di questo solido.

fig. 69. Sia il cerchio ABCD la base di un cono, ed OV il suo asse, o l' altezza; e la piramide PQRS abbia per base il rettilineo PQR uguale al cerchio ABCD, e la sua altezza PS pareggi la OV: dico che quel cono, e questa piramide sieno tra loro uguali.

Imperocchè se la piramide PQRS non è uguale al cono, che ha per base il cerchio ABCD, e per altezza OV; si supponga pareggiare quell' alsto cono ugualmente alto, che ha per base il cerchio *abcd* minore di ABCD, e concentrico. S' iscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCec. di un numero pare di lati uguali, che non tocchi il cerchio minore *abcd*; e poi su di un tal poligono s' intenda eretta la piramide iscritta nel cono proposto, che sarà perciò di uguale altezza, che l' altra PQRS; e quindi dovrà stare quella a questa, come il poligono AEBFCec. al rettilineo PQR *, o al cerchio ABCD, che si è
* 6.XII. supposto uguale a questo rettilineo: è perciò siccome il poligono AEBFCec. è minore del cerchio ABCD in cui è iscritto; dovrà anche la pirami-

de, che ha per base il poligono AEBFCec. esser minore dell' altra PQRS, vale a dire del cono, che ha per base il cerchio *abcd*, e per altezza la OV, il quale si è supposto uguale alla piramde PQRS. Lo che è impossibile; poichè la piramde, che ha per base il poligono AEBFCec. comprende un tal cono. Non può dunque la piramide PQRS pareggiare un cono dell' altezza OV, che abbia per base un cerchio minore del cerchio ABCD.

Si supponga in secondo luogo la piramide PQRS essere uguale ad un altro cono, che abbia la stessa altezza OV, e per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD, e concentrico. S' iscriva pure in questo cerchio il poligono GMHNKec. di un numero pare di lati uguali, che non tocchi l' altro cerchio ABCD, e su di questo poligono si concepisca eretta la piramide iscritta in quel cono. Ed essendo questa piramide uguale in altezza all' altra PQRS; sarà quella a questa, come la base GMHNKec. alla base PQR *, cioè al cerchio ABCD: e quindi siccome il poligono GMHNKec. è maggiore del cerchio ABCD; dovrà anche la piramide, che ha per base quel poligono esser maggiore dell' altra PQRS, o del cono che ha per base il cerchio GHKL, e per altezza OV, al quale questa piramide si era supposta uguale. Ma ciò non può essere; poichè la piramide GMHNKec.V è iscritta in questo cono. Adunque la piramide PQRS nè anche può pareggiare un cono dell' altezza OV, che abbia per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD. Si è poc' anzi dimostrato,

* 6. XII.

che non poteva pareggiare un cono ugualmente alto, la cui base fosse il cerchio *abcd* minore di ABCD. Laonde una tal piramide dovrà pareggiare il cono ABCDV C. B. D.

Cor. E perciò anche *ogni cilindro sarà uguale ad un prisma, che ha per base un rettilineo uguale alla base del cilindro, e per altezza un lato di un tal solido.*

Poichè l' uno, e l'altro di questi solidi sono rispettivamente tripli del cono, e della piramide, *c.7.XII) che hanno le stesse loro basi, e l'altezza medesima *.
*10.XII.)

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se vi sieno due coni tali, che la superficie di uno sia uguale alla base dell' altro, e la perpendicolare, che dal centro della base di questo si abbassa su di un suo lato, pareggi l' altezza del primo; questi due coni saranno uguali.

fig. 70. Sieno i due coni ABLC, DEMF, ed il cono ABLC abbia la sua base, cioè il cerchio BLC uguale alla superficie dell' altro cono DEMF, e l' altezza AG dello stesso cono ABLC pareggi la perpendicolare HK, che dal centro della base del cono DEMF si abbassa su di un suo lato DE dico che questi due coni sieno uguali.

Poichè essendo la base del cono ABLC uguale alla superficie dell' altro DEMF; dovrà stare la base del cono ABLC a quella del cono DEMF,

come la superficie di questo stesso cono alla sua base *. Ma come quella superficie conica a questa base, così sta DE ad EH *, o pure DH ad HK, per esser simili i triangoli DEH, DHK, o finalmente DH ad AG, che si è supposta pareggiare HK. Quindi come la base del cono ABLC a quella dell' altro DEMF, così sta l' altezza DH di questo all' altezza AG del primo: e perciò i coni ABC, DEF avendo le loro basi reciprocamente proporzionali alle altezze, saranno tra loro uguali *. C. B. D.

* 7. V.
* p. 12.
* 16. XII.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Ogni rombo conico è uguale ad un cono la cui base è un cerchio uguale alla superficie di uno dei coni, che compongono il rombo, e l' altezza è quanto quella perpendicolare, che si abbassa sopra uno dei lati di questo cono stesso, dal vertice dell' altro cono.

Sia ABPCD un rombo conico, che abbia per base il cerchio BPC, ed AD per altezza; e si ponga il cono HGQK, che abbia la base, cioè il cerchio GQK uguale alla superficie del cono ABPC, e l'altezza HL quanto la perpendicolare DF, che dal vertice D dell' altro cono DBPC componente il rombo conico, si abbassa sopra il lato AB del cono ABPC: dico che il cono HGQK sia uguale al rombo conico ABPCD. *fig.* 71.

Si supponga un altro cono NMRX, che abbia la base MRX uguale alla base BPC del rombo conico, e l'altezza NO quanto la AD. E poichè il cono DBPC
*14.XII. sta all'altro ABPC, come DE ad EA *, sarà componendo il rombo conico ABPCD al cono ABPC, come DA ad AE. Ma sta pure il cono NMRX
*14.XII. al cono ABPC, come NO, ossia AD ad AE *. Dunque il rombo conico ABPCD, e'l cono NMRX serbando al cono ABPC la stessa ragione, dovran-
* 9. V. no essere uguali tra loro *. Or essendosi supposta la base del cono HGQK uguale alla superficie dell' altro cono ABPC; dovrà stare la superficie di questo cono alla sua base, come la base del cono HGQK a quella del cono ABPC, o dell' altro NMRX. Ma la superficie del cono ABPC sta alla
* p. 12. sua base, come AB a BE *, o pure come AD a DF, per esser simili i triangoli ABE, ADF, o finalmente come NO ad HL, le quali rette pareggiano rispettivamente le AD, DF. Dunque starà la base del cono HGQK a quella dell' altro NMRX, come l' altezza NO di questo all' altezza HL del primo: e perciò essi coni saranno ugua-
*15.XII. li *. Laonde essendosi dimostrato il cono NMRX uguale al rombo conico ABPCD; sarà un tal rombo anche uguale al cono HGQK. C. B. D.

Cor. Si rileva dalla dimostrazione del precedente teorema, che due, o più coni i quali hanno la medesima base pareggiano un sol cono, che ha la base stessa, e per altezza la somma delle altezze loro.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base, e sul cerchio, che si ottiene da tal sezione s' intenda descritto dalla parte di sotto un altro cono, che abbia per vertice il centro della base del primo; verrà questo cono a costituire un rombo conico con quell' altro, che il piano segante tronca verso il vertice del cono proposto: e se un tal rombo conico si tolga dall' intero cono; il solido che rimane sarà uguale a quel cono la cui base è un cerchio uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli, e l' altezza è quanto la perpendicolare, che dal centro della base del cono proposto si abbassa su di un suo lato.

Sia il cono ABGC, il qual si seghi con un piano parallelo alla base, che faccia la sezione DKE; ch' è un cerchio *; e sopra questo cerchio si concepisca descritto l' altro cono DKEF, il quale abbia per vertice il centro F della base del cono ABGC: dico che se dal cono ABGC si tolga il rombo conico ADKEF; il rimanente solido sia uguale al cono QHRL, la cui base è un cerchio uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli DKE, BGC, e l' altezza è quanto la perpendicolare FH, che si abbassa dal centro F della base del cono ABGC sopra un suo lato AB.

fig. 72.

* d. p. 13.

Ponghansi i due altri coni NMSX, POTR tali, che

la base del cono NMSX sia uguale alla superficie del cono ABGC, e l'altezza uguale alla FH; che perciò sarà un tal cono NMSX uguale all' altro
* p. 15. ABGC*. Sia poi la base del cono POTR uguale alla superficie del cono ADKE, e l'altezza anche quanto la FH; sarà un tal cono POTR uguale al rom-
* p. 16. bo conico ADKEF*. Or i tre coni QHRL, NMSX, POTR hanno la stessa altezza, e perciò sono nella
* 11.XII ragione delle basi*; sarà dunque il cono NMSX uguale ai coni QHRL e POTR, siccome la base del primo è uguale alle basi di questi altri due. Laonde essendo il cono NMSX uguale al cono ABGC, e il cono POTR al rombo conico ADKEF; dovrà il rimanente cono QHRL esser anche uguale al solido che rimane togliendo il rombo conico ADKEF dal cono ABGC. C. B. D.

COR. Dalla precedente dimostrazione si rileva, che due, o più coni, i quali hanno la medesima altezza pareggiano un sol cono dell'altezza stessa, che ha per base un cerchio uguale alla somma delle basi dei coni proposti.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se uno dei coni, che compongono un rombo conico si seghi con un piano parallelo alla base, e sul cerchio, ch' è la sezione in esso fatta, descrivasi un cono, il quale abbia comune il vertice coll'altro cono, che fa parte del rombo conico; e che poi quel rombo conico, che così si ottiene, si tolga dal

proposto: il rimanente solido pareggerà un cono, la cui base è uguale alla superficie, ch' è tra i piani paralleli, e l'altezza è quanto la perpendicolare, che dal vertice dell'altro cono componente il rombo conico proposto si abbassa sopra un lato del primo cono.

Sia il rombo conico BAGCD, e l' un dei coni BAGC, che lo compongono si seghi con un piano parallelo alla base, il quale faccia la sezione EQF, ch' è un cerchio, sul quale si descriva il cono, che ha per vertice il punto D: dovrà la differenza de' due rombi conici BAGCD, BEQFD pareggiare il cono KHSL, la cui base è uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli AGC, EQF, e l' altezza sia quanto la perpendicolare DH, che cade dal punto D sulla BA, prolungata se bisogna. *fig.* 73.

Si pongano i due altri coni NMVX, POTR, e sia la base del cono NMVX uguale alla superficie del cono BAGC, e l'altezza alla DH; che perciò un tal cono NMVX sarà uguale al rombo BAGCD *: sia poi la base del cono POTR uguale alla superficie del cono BEQF, e l' altezza quanto la stessa DH, il che renderà questo cono POTR uguale all'altro rombo conico BEQFD. E poichè la superficie del cono BAGC si compone dalla superficie del cono BEQF, e da quella, ch' è tra i piani paralleli EQF, AGC; e la superficie del cono BAGC è uguale alla base del cono NMVX; la superficie del cono BEQF è uguale alla base del cono POTR; e finalmente la superficie, ch'è tra i piani paralleli EQF, AGC, è uguale alla base del cono KHSL: perciò la base del cono NMVX è uguale alle basi dei coni

* p. 16.

POTR, KHSL. Laonde avendo questi coni anche la stess' altezza, sarà il cono NMVX uguale ai coni
* c.p.17. KHSL, POTR *. Ma il cono NMVX è uguale al rombo BAGCD, e 'l cono POTR all' altro rombo BEQFD. Quindi il rimanente solido, ch'è la differenza di que' due rombi, dovrà pareggiare il cono KHSL. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se un arco di cerchio minore della semicirconferenza si divida in un qualunque numero di parti, e si tirino a queste le corde; e poi un tal arco insieme colle corde, che si sono in esso tirate, si rivolga intorno ad un raggio, che passa per un de' suoi estremi; la superficie sferica descritta da tutto l' arco sarà maggiore di quella, che descrivono tutte quelle corde.

fig. 74. Sia l' arco di cerchio ADB minore della semicirconferenza ABC, ed esso sia diviso nelle parti AD, DE, EB alle quali sien tirate le corde AD, DE, EB: dico che se si rivolgano l' arco, e le corde intorno al raggio DA, che passa per uno degli estremi A dell' arco; la superficie sferica descritta dall' arco sia maggiore della superficie, che vien generata dalle corde AD, DE, EB.

Dall' altro estremo B dell' arco si abbassi sul raggio OA la perpendicolare BF, la quale nel rivolgersi l' arco ADB intorno ad OA descriverà un

cerchio. E poichè la superficie sferica descritta dall' arco ADB, e quell' altra, che si descrive dalle AD, DE, EB hanno per termine comune la circonferenza del cerchio descritto da BF, verso il quale sono concave, e che di più la prima superficie comprende la seconda: perciò sarà la superficie generata dall' arco ADB maggiore di quella, che si descrive dalle corde AD, DE, EB delle parti in cui esso arco si è diviso *. C.B.D. * pr. 4.

Cor. Dimostrando nel modo stesso, che la superficie sferica descritta dall' altro arco BGC, che vi resta per compiere la semicirconferenza ABC sia maggiore della superficie, che si descrive dalle corde delle parti in cui esso si divide; ne segue, che *La superficie di una sfera sia maggiore della superficie del solido, che si descrive da un qualunque rettilineo iscritto nel semicerchio generatore della sfera.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se ad un arco di cerchio minore della semicirconferenza si tirino in diversi punti le tangenti, le quali s' incontrino tra loro, e le estreme si arrestino ai raggi, che passano per gli termini dell' arco; e s' intenda rivolgersi intorno ad uno di questi raggi l' arco, e le tangenti: la superficie sferica, che descrivesi dall' arco sarà minore di quella superficie, che descrivono le tangenti.

Sia l' arco circolare ADB minore della semicir- *fig.* 75.

conferenza, al quale nei punti D, E, F si tirino le tangenti LG, GH, HK; e la prima, e l'ultima di queste incontrino in L, e K i raggi OA, OB tirati per gli termini A, B dell' arco: dico che la superficie sferica, che descrivesi dall' arco ADB in rivolgersi intorno al raggio AO sia minore della superficie, che si descrive in una tal rivoluzione dalle tangenti LG, GH, HK.

Dall' estremo B dell' arco si abbassi sul raggio OA, intorno al quale un tal arco si suppone girare, la perpendicolare BN, e si tiri BM tangente all' arco stesso. E poichè rivolgendosi intorno ad AN si l' arco ADB, che le tangenti LG, GH, HM, MB, si vengono a descrivere due superficie una dall' arco, e l' altra dalle tangenti, le quali hanno per loro termine comune la circonferenza di quel cerchio, che si descrive dalla BN, e che di più la prima è compresa dalla seconda; sarà dunque quella minore di questa *.
* pr. 4.
Or essendo BM tangente del cerchio, e perciò perpendicolare a BO, MK è maggiore di MB; ma è anche il punto K più distante dall' asse AC, che il punto B: adunque la superficie conica descritta da MK è maggiore di quella, che si descrive da BM. Aggiuntavi di comune la superficie descritta dalle LG, GH, HM; sarà l' intera superficie descritta dalle LG, GH, HK maggiore di quella, che si descrive dalle LG, GH, HM, MB; e perciò anche maggiore della superficie sferica descritta dall' arco ADB, della quale si era poc' anzi dimostrata maggiore quella, che descrivevano le tangenti AG, GH, HM, MB. C. B. D.

COR. Dimostrando similmente, che la superficie sferica descritta dall' altro arco BC, che vi rimane per compiere la semicirconferenza ABC, sia minore della superficie descritta dalle tangenti KP, PQ; ne segue, che

La superficie di una sfera sia minore della superficie di quel solido, che si descrive da un qualunque rettilineo circoscritto al semicerchio, dal quale si genera la sfera.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se vi sieno due archi circolari, che abbiano per centro comune il vertice di quell' angolo, ch' essi sottendono, e l' arco esteriore si divida in modo, che le corde delle sue parti non tocchino l' arco interiore; la superficie generata da quelle corde rivolgendosi insieme coll' arco intorno al raggio tirato per uno de' termini di questo, sarà maggiore della superficie sferica, che in tal rivoluzione si descrive dall' arco interiore.

Sieno ABH, DEF due archi circolari descritti intorno allo stesso centro O, e tra i lati dello stesso angolo DOF; e l' arco esteriore DEF sia diviso nelle parti DE, EG, GF in modo, che le corde DE, EG, GF non tocchino l' arco interiore ABH: dico, che se intorno a DO si rivolgano gli archi, e le corde, sia la superficie descritta dalle corde DE, EG, GF maggiore della su- *fig.* 76.

perficie sferica, che descrivesi dall' arco ABH.

Dal centro O si abbassino sulle DE, EG, GF le perpendicolari, e per gli punti B, K, L ove queste incontrano l' arco ABH, gli si tirino le tangenti MN, NP, PQ, che saranno rispettivamente parallelle alle DE, EG, GF, e minori di queste corde; ma sono anche i punti E, G, F più distanti dall' asse DO, che non lo sono gli altri N, P, Q: laonde le superficie coniche generate dalle DE, EG, GF saranno rispettivamente mag-
* pp. 11. e 13. giori delle altre generate dalle MN, NP, PQ *, cioè l' intera superficie descritta dalle corde DE, EG, GF sarà maggiore di quella, che descrivono le tangenti MN, NP, PQ; e quindi anche maggiore della superficie sferica descritta dall' arco
* p. 20. ABH *. C. B. D.

Cor. Dimostrando similmente, che la superficie descritta dalle corde delle parti, in cui si divide l' altro arco FRT, ch' è il compimento al semicerchio dell' arco DEF, sia maggiore della superficie sferica descritta dall' arco HSC compimento al semicerchio dell' arco ABH; ne segue, che

Se vi sieno due cerchi concentrici, la superficie di quel solido, che si genera da un rettilineo iscritto nel cerchio esteriore, il qual non tocca il cerchio interiore, sia maggiore della superficie della sfera, che vien generata da questo cerchio.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se un arco di cerchio non maggiore del qua-

drante si divida in parti uguali, ed a queste parti vi si tirino le corde; la superficie descritta da queste corde, nel rivolgersi insiem coll' arco intorno ad un raggio tirato per un di lui estremo, sarà uguale al rettangolo dell' altezza dell' arco nella circonferenza di quel cerchio, che ha per raggio la distanza di una di quelle corde dal centro dell' arco.

Sia ABD un arco di cerchio non maggiore del quadrante, il quale sia diviso nelle parti uguali AB, BE, ED, e sieno AB, BE, ED le corde, che le sottendono: dico che la superficie descritta da queste corde, nel rivolgersi insieme coll'arco ABD intorno al raggio OA, tirato per un di lui estremo A, sia uguale al rettangolo dell' altezza AH di esso arco nella circonferenza, che ha per raggio la perpendicolare OP, che dal centro O dell' arco si abbassa su di una di quelle corde AB. *fig.* 77.

Dai punti delle divisioni B, E si abbassino sul raggio immobile AO le perpendicolari BF, EG. E poichè nel rivolgersi il triangolo ABF rettangolo in F intorno al suo lato AF, l' altro lato AB descrive una superficie conica; sarà perciò la superficie descritta dalla AB uguale al triangolo rettangolo, che ha per lati intorno all' angolo retto, la AB stessa, e la circonferenza del raggio BF *, o sia al rettangolo della circonferenza di BF in BP metà di AB. Ma perchè sono simili i triangoli ABF, APO, sta, permutando, AF ad AP, come BF a PO, o come la circonferenza

* p. 11.

* c.p.3. del raggio BF a quella del raggio PO* ; quindi il rettangolo di BP nella circonferenza del raggio BF, dovendo pareggiar l' altro rettangolo di BF nella circonferenza del raggio PO , sarà anche questo uguale alla superficie conica descritta da AB . Or nel rivolgersi il trapezio EBFG intorno al lato FG, cui gli altri BF, EG sono perpendicolari, la EB descrive una porzione di superficie conica, ch'è tra i piani paralleli descritti dalle EG, BF, la quale è quanto il rettangolo contenuto dalla EB nella KL, che dal punto medio della BE si tira
* p. 13. parallela alla BF *. Ma poichè, congiunta la OK, l'angolo OKB è retto, e quindi uguale ai due BKN, KBN ; toltone di comune l' angolo BKN, resterà l' angolo KBN uguale all'altro LKO; e perciò i due triangoli LKO, BKN, e quindi gli altri LKO, BEM saranno simili, e starà BE a BM, come KO a KL , o come la circonferenza del raggio KO a quella del raggio KL: laonde il rettangolo di BM, o FG nella circonferenza del raggio KO, o PO sarà uguale a quello di BM nella circonferenza del raggio KL, cioè alla superficie conica descritta da BE . Per lo che essendosi dimostrata la superficie conica descritta da BA uguale al rettangolo di AF nella circonferenza di PO; sarà la superficie descritta dalle OB , BE uguale al rettangolo delle AF , FG, cioè di AG nella circonferenza del raggio OP . E così continuando a dimostrare per le altre superficie descritte dalle altre corde ED, ec; si conchiuderà, che la superficie descritta da tutte esse sia uguale al rettangolo della circonferenza di OP in AH . C.B.D.

Cor. Se l' arco AD fosse stato il quadrante; la superficie descritta dalle corde degli archi uguali in cui esso si sarebbe diviso, avrebbe pareggiato il rettangolo della circonferenza del raggio OP nel raggio OA. E quindi se nell' altro quadrante del semicerchio ABC si fosse praticato lo stesso, se ne sarebbe concluso, che

La superficie di quel solido, che vien descritto da un semipoligono di un numero pari di lati uguali, iscritto in un semicerchio, debba essere uguale al rettangolo del diametro di questo, nella circonferenza, che ha per raggio la distanza di uno dei lati del semipoligono dal centro del semicerchio.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se un arco non maggiore del quadrante si divida in parti uguali, e si tirino a queste le corde; e che poi s' intenda rivolgersi il rettilineo contenuto da queste corde, e dai raggi tirati per gli estremi dell' arco, intorno ad uno di questi raggi: il solido, che da un tal rettilineo si descrive; sarà uguale al cono, che ha per base un cerchio uguale alla superficie generata da quelle corde, e per altezza la perpendicolare, che dal centro dell' arco cade in una di esse.

Sia l' arco ABD non maggiore del quadrante, *fig.* 78. il qual si divida nelle parti uguali AB, BE, ED,

ed a queste gli si tirino le corde: dico che il solido, che si descrive dal rettilineo ABEDO rivolgendosi intorno al raggio AO, sia uguale ad un cono, che ha per base il cerchio uguale alla superficie descritta dalle AB, BE, ED, e per altezza la perpendicolare OP abbassata dal centro O dell' arco su di una delle corde AB.

Si tirino i raggi OB, OE. Or il triangolo ABO rivolgendosi intorno al suo lato AO descrive un
* d. 2. rombo conico *, uguale a quel cono, la cui base pareggia la superficie conica descritta da AB, e l'
* p. 16. altezza è quanto la OP *: e se si prolunghi la EB in G, si vede chiaramente, che i due triangoli GEO, GBO, rivolgendosi intorno alla GO, descrivono due rombi conici; che perciò il solido terminato dalla superficie conica descritta da EB, e da quelle, che descrivonsi dalle BO, EO, il quale è la differenza di quei due rombi conici, sarà uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie conica descritta da EB, e per altezza la perpendicolare OQ,
* p. 18. che cade sulla EB dal centro O *, o ch' è lo stesso la OP. Adunque sarà l' intero solido descritto dal quadrilatero ABEO uguale a quel cono, la cui base è quanto la superficie descritta dalle AB, BE,
* c. p. 17. e che ha per altezza la OP *. E così continuando a dimostrare, se ne conchiuderà essere tutt' il solido descritto dal rettilineo proposto ABEDO uguale al cono, la cui base è uguale alla superficie descritta dalle AB, BE, ED, ed OP n' è l' altezza.

Che se l' arco AB fosse stato il quadrante; pro-

lungando l' ultima delle corde FD fino ad incontrare il raggio OA in H; l' ultimo solido terminato dalla superficie conica generata da DF, da quella, che si descrive dalla OD, e dal cerchio descritto da OF, essendo la differenza del cono descritto dal triangolo FOH, e del rombo conico, che descrivesi dall' altro triangolo ODH, dovrebbe pareggiare quel cono, la cui base è uguale alla superficie conica descritta da FD, ed OR, o sia OP n' è l'altezza *: che perciò aggiugnendo questo solido a quello descritto dal rettilineo ABEDO; ne risulterà il solido iscritto nell' emisfero, che vien generato dal quadrante circolare ABF rivolgendosi intorno al raggio AO, uguale al cono, la cui base pareggia la superficie di un tal solido, e l' altezza è quanto la OP. * p. 17.

Cor. Dimostrandosi lo stesso per lo solido descritto da un altro rettilineo identico, il qual s' iscriva nell' altro quadrante OFC; ne segue, che

Se in un semicerchio s' iscriva un semipoligono di un numero pari di lati uguali, e questo si rivolga intorno al diametro; il solido iscritto nella sfera pareggerà quel cono, la cui base è uguale alla superficie di questo solido, e l' altezza è quanto la perpendicolare, che dal centro del semicerchio cade sopra un lato del semipoligono.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

La superficie di una sfera è uguale al rettan-

golo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza del suo cerchio generatore, e dal diametro di questo stesso cerchio.

fig. 79. Sia ABC quel semicerchio, che genera una sfera; ed AC il suo diametro; ed il rettangolo ZY sia contenuto dalla XY, la quale rappresenti la circonferenza del diametro AC, e dalla XZ, che pareggia un tal diametro: dico che questo rettangolo sia uguale alla superficie della sfera, che quel semicerchio descrive.

Imperocchè se il rettangolo ZY non è uguale alla superficie della sfera, che si descrive dal semicerchio ABC; dovrà pareggiare la superficie di un' altra sfera descritta da un semicerchio minore di ABC, o pur maggiore. Pareggi in primo luogo quella della sfera, che si descrive dal semicerchio *abc* minore di ABC, e concentrico. Si divida continuamente per metà la semicerconferenza esteriore ABC, finchè le corde de' suoi archi AG, GB, BH, HC non tocchino la semicirconferenza interiore *abc*; e dal centro O sopra una di tali corde GA si abbassi la perpendicolare OP: sarà questa OP minore del raggio OA; e perciò la circonferenza del raggio OP sarà minore della circonferenza del raggio OA*, cioè della XY. Si tagli dunque dalla XY la X*y* uguale alla circonferenza del raggio OP, e si compia il rettangolo ZY; sarà un tal rettangolo uguale alla superficie di quel solido, che si descrive dal semipoligono AGBHC iscritto nel semicerchio ABC*. Ma la superficie di questo solido è maggiore di quella

* c. p. 3.
* c. p. 22

della sfera descritta del semicerchio *abc* *; la quale si è supposto pareggiare il rettangolo ZY: adunque sarebbe il rettangolo Z*y* maggiore dell' altro ZY. Lo che ripugna. E perciò il rettangolo ZY non può essere uguale alla superficie di una sfera descritta dal semicerchio *abc* minore di ABC. * c.p. 21.

Suppongasi dunque questo rettangolo ZY essere uguale alla superficie di un'altra sfera, descritta dal semicerchio DEF maggiore di ABC, e concentrico. Si divida un tal semicerchio DEF continuamente per metà, finchè le corde de' suoi archi DK, KE, EL, LF non tocchino la semicirconferenza interiore ABC; e si abbassi dal centro O sopra una di tali corde DK la perpendicolare OQ: sarà questa OQ maggiore del raggio OA, e perciò la circonferenza del raggio OQ sarà maggiore di quella del raggio OA*; cioè della XY. Laonde si prolunghi la XY in T, finchè XT pareggi la circonferenza del raggio OQ, e la XZ si prolunghi anche in R, in modo che la XR sia uguale al diametro FD di quest' altro semicerchio DEF; e si compia il rettangolo RT: sarà questo rettangolo uguale alla superficie del solido, che si descrive dal semipoligono DKELT*. Ma la superficie di questo solido è minore di quella della sfera generata dal semicerchio DEF, nella quale quel poligono viene ad essere iscritto*. Adunque anche il rettangolo RT, ch' è uguale alla superficie di quel solido, dovrà esser minore del rettangolo ZY, che si suppone pareggiare quella della sfera. Lo che ripugna. Quindi il rettangolo

* c. p.3.

* c.p.22

* c.p.19.

ZY non può essere uguale alla superficie di una sfera descritta da un semicerchio maggiore di ABC. Si è poi dimostrato, che nè anche poteva esser quanto quella di una sfera descritta da un semicerchio minore. Adunque dovrà un tal rettangolo ZY essere uguale alla superficie della sfera, che si descrive dal semicerchio ABC. C. B. D.

fig. 66. SCOL. Rappresenti AB la circonferenza del cerchio generatore di una sfera, e la AC applicata perpendicolarmente alla AB nell' estremo A, sia il diametro di un tal cerchio: se si compia il rettangolo CB, sarà questo uguale alla superficie di
* p. 24. una tale sfera *. Or se si prolunghi la AC in D, finchè AD sia doppia di AC, e quindi quadrupla di AE metà di AC, e che perciò è uguale al raggio del cerchio generatore della sfera; congiunte le BD, BE, il triangolo DAB essendo uguale al rettangolo CB, sarà quanto la superficie sferica generata dal cerchio del raggio AE; e l'altro triangolo EAB
* p. 3. dinoterà un tal cerchio *. Laonde la superficie sferica starà al suo cerchio generatore, come il triangolo DAB all' altro EAB; cioè come DA ad AE, e quindi come 4 ad 1. Vale a dire

La superficie di una sfera è quadrupla del suo cerchio generatore

E questa è l' esibizione della superficie di una sfera secondo Archimede.

E volendo esibire un sol cerchio uguale alla superficie di una sfera, sarà questo il cerchio, che ha per raggio il diametro del cerchio generatore della sfera: poichè quel cerchio è quadruplo di questo, dall' essere il quadrato del raggio di quello, qua-

druplo del quadrato del raggio di questo *. * 2.XII.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Ogni sfera è uguale al un cono, che ha per base il cerchio uguale alla superficie della sfera, e per altezza il raggio di questa.

Sia ABC quel semicerchio, che genera la sfera, *fig.* 79. ed OA il suo raggio: ed il cono ZXRY abbia per base il cerchio XRY uguale alla superficie della sfera, che da un tal semicerchio si descrive, e la sua altezza ZM sia quanto la OA: dico che questo cono pareggi quella sfera.

Imperocchè se il cono ZXRY non è uguale alla sfera, che si descrive dal semicerchio ABC; dovrà pareggiare una sfera la qual si descriva da un semicerchio minore di ABC, o pur maggiore. Si supponga in primo luogo uguale a quella sfera, che descrivesi dal semicerchio *abc* minore di ABC, e concentrico. Si divida continuamente per metà la semicirconferenza esteriore ABC, finchè le corde de' suoi archi AG, GB, BH, HC non tocchino la semicirconferenza interiore *abc*; e dal centro O si abbassi sopra una di queste corde AG la perpendicolare OP. Or poichè la superficie del solido, che si descrive dal semipoligono AGBHC rivolgendosi intorno ad AC è minore della superficie della sfera, che vien descritta dal semicerchio ABC; e questa si è supposta pareggiare il cerchio

XRZ; dovrà perciò quella superficie essere quanto un cerchio minore di XRY. Sia questo il cerchio *xry*, che si supponga concentrico all' altro XRY, e s' intenda descritto su questo cerchio il cono *zxry*, che abbia per altezza la *z*M uguale alla OP, ch' è minore di OA, e quindi di MZ; sarà un tal cono uguale al solido generato dal
* c.p.23. semipoligono AGBHC *. Ma questosolido è maggiore della sfera, che si descrive dal semicerchio *abc*: adunque dovrebbe anche il cono *zxry* esser maggiore dell' altro ZXRY. Lo che ripugna. Non può dunque il cono ZXRY essere uguale ad una sfera la quale sia descritta da un semicerchio minore di ABC.

Si supponga perciò, ch' esso cono possa pareggiare la sfera, che si descrive da un semicerchio maggiore di ABC; e sia questo il semicerchio DEF concentrico ad ABC. Si divida anche la semicirconferenza esteriore DEF continuamente per metà, finchè gli archi FK, KE, EL, LF sien tali, che le loro corde non tocchino la semicirconferenza interiore ABC, e sopra una di tali corde DK si abbassi la perpendicolare OQ. E poichè la superficie del solido, che si genera dalla rivoluzione del semipoligono DKELF intorno alla DF, è maggiore della superficie della sfe-
* c.p.31. ra, che si descrive dal semicerchio ABC *: perciò dovrà la superficie di quel solido esser uguale ad un cerchio maggiore del cerchio XRY: sia questo il cerchio SVT descritto intorno allo stesso centro M di quello, e su di esso s' intenda eretto quel cono, che ha per altezza la NM uguale alla

OQ, ch'è maggiore della OA, e quindi della MZ; sarà un tal cono uguale a quel solido *. Laonde * c.p.23. siccome quel solido è minore della sfera, che si descrive del semicerchio DEF nella quale è iscritto *; così sarà pure il cono NSVT minore dell'altro ZXRY. * c.p.19. Lo che anche ripugna. E perciò non può il cono ZXRY pareggiare la sfera, che si descrive da un semicerchio maggiore di ABC. Ma si è poc' anzi dimostrato, che nè pure poteva quel cono pareggiare una sfera, la quale si descrivesse da un semicerchio minore di ABC. Adunque dovrà esser quanto la sfera, che da un tal semicerchio si descrive. C. B. D.

Scol. Essendo la superficie di una sfera quadrupla del suo cerchio generatore *; ed i due co- *sc.p.24. ni uno che abbia per base la superficie sferica, l' altro il cerchio generatore di esso, e per altezza comune il raggio, dovendo esser tra loro come le basi *; perciò sarà il primo quadruplo del * 11.XII secondo. Ma si è dimostrato, che il primo sia uguale alla sfera. Adunque

Ogni sfera è quadrupla di quel cono, che ha per base il cerchio, generatore della sfera, e per altezza il raggio di questo.

Ed è in tal modo, che Archimede ha esibita la sfera.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Ogni cilindro che abbia la base uguale al cer-

chio generatore di una sfera, e per altezza il diametro di questo, è sesquialtero della sfera: e la di lui superficie insieme colle basi, è ancora sesquialtera della superficie della sfera.

N. B. Una grandezza si dice *sesquialtera* di un' altra, se questa accresciuta della sua metà pareggi la prima.

Imperocchè il cilindro, che abbiamo detto, essendo triplo di quel cono, che ha la stessa base
* 10.XII sua, e l' altezza medesima *, dovrà esser sestuplo di quell' altro cono, che ha la medesima base, e
* 14.XII per altezza il raggio dalla sfera *: si è poi dimo-
* sc.p.25. strata la sfera quadrupla di quest' ultimo cono *. È chiaro dunque, che il cilindro sia sesquialtero della sfera.

Di nuovo, poichè la superficie di un tal cilindro sta alla base, come il doppio del lato del ci-
* p. 10. lindro al raggio di essa base *: ed è il lato del cilindro proposto uguale al diametro della sua base; quindi il doppio del lato sarà quadruplo del raggio della base; e perciò anche la superficie cilindrica sarà quadrupla della base. Laonde se ad una tal superficie vi si aggiungano le due basi; sarà la superficie cilindrica insieme colle due basi sestupla di una di queste, cioè del cerchio generatore della sfera. Ma si è dimostrato, che la superficie della sfera è quadrupla di questo stesso
* sc.p.24. cerchio *; quindi tutta la superficie cilindrica è sesquialtera di quella della sfera. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

La superficie di un segmento sferico è uguale al rettangolo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza del cerchio generatore dell' intera sfera, e dall' altezza di quell' arco di questo cerchio, dal quale si descrive la superficie del proposto segmento.

Sia ABC il semicerchio, che genera una sfera; *fig.* 80. ed abbassato da un qualunque punto B della semicirconferenza ABC la perpendicolare BH sul diametro AC, dinoti AEBH quel semisegmento circolare dal quale si descrive un segmento sferico: sia poi il rettangolo ZY contenuto dalla XY uguale alla circonferenza del cerchio, che ha per raggio OA, e dalla XZ uguale alla AH altezza dell'arco AB: dico che tal rettangolo ZY pareggi la superficie del segmento sferico descritto da AEBH.

Poichè se questo rettangolo non è uguale alla superficie di un tal segmento sferico, il qual si supponga minore della mezza sfera; dovrà pareggiare la superficie di un segmento sferico, la qual si descriva da un arco circolare maggiore di AEB, o pur minore, e che si potrà supporre sottendere quello stesso angolo AOB, ch' era sotteso dall'arco AEB. Suppongasi in primo luogo uguale ad una superficie sferica generata dall'arco *aeb* minore di AEB, e descritto come si è detto. Si divida continuamente per

metà l'arco AEB, finchè le corde degli archi, in cui
*c.l.2.XII resta diviso, non tocchino l'altro arco *aeb**; e sopra una di tali corde AE si abbassi la perpendicolare OP, che sarà minore di OA, e quindi di XZ; che perciò anche la circonferenza del raggio OP sarà
* c. p. 3. minore di quella del raggio OA *, cioè della linea retta XY. Laonde si tagli dalla XY la X*y* uguale alla circonferenza del raggio OP, e si compisca il rettangolo Z*y*, il quale sarà quanto la superficie, che si descrive dalle corde AE, EB, nel rivol-
* p. 22 gersi insieme coll' arco AEB intorno ad AO *. Or una tal superficie è maggiore della superficie
* p. 21. sferica, che si descrive dall' arco circolare *aeb* *: quindi anche il rettangolo Z*y* dovrà esser maggiore dell' altro ZY. Lo che non può essere. E perciò non può il rettangolo ZY pareggiare la superficie sferica descritta da un arco circolare minore di AEB.

Sia perciò un tal rettangolo uguale a quella superficie sferica, che vien generata da un altro arco circolare DFG maggiore di AEB, e descritto come nel principio di questa dimostrazione si è detto. Si divida pure un tal arco continuamente per metà, finchè le corde DF, FG delle parti, in cui si è esso diviso
*c.l.2.XII non tocchino l' altro arco AEB *; e si abbassi dal centro O comune a questi due archi, la perpendicolare OQ sopra una di quelle corde DE: sarà OQ maggiore di OA; e perciò la circonferenza del raggio OQ sarà anche maggiore di quel-
* c. p. 3. la del raggio OA *, cioè di XY. Laonde si prolunghi XY in T, finchè XT sia uguale alla circonferenza del raggio OQ: e prolungata anche la XZ in R, sicchè XR pareggi DH altezza dell'

arco DG, si compia il rettangolo RT, il quale sarà uguale alla superficie, che si descrive dalle corde DF, FG rivolgendosi insieme coll' arco DFG intorno al raggio DO *. Ma una tal superficie è minore di quella, che in questa rivoluzione si descrive dall' arco DFG: adunque dovrà benanche il rettangolo RT esser minore del rettangolo ZY. La qual cosa è impossibile. E perciò non può il rettangolo ZY esser uguale alla superficie sferica, che si descrive da un arco maggiore dell' arco AEB: si è pur dimostrato, che non poteva un tal rettangolo pareggiare la superficie sferica, che si descriverebbe da un arco minore di AEB. Laonde dovrà esser quanto quella, che si descrive dall' arco AEB.

* p. 22.

Che se il segmento sferico fosse stato maggiore della mezza sfera, cioè quello, che vien descritto dal semisegmento circolare CBH maggiore del quadrante; è chiaro che la sua superficie, sia anche quanto il rettangolo della circonferenza del raggio OA in CH: poichè essa è la differenza della superficie della sfera, e di quella dell'altro segmento sferico generato dal semisegmento circolare AEBH, ch'è minore del quadrante; e quindi quanto la differenza de' due rettangoli, che hanno per base comune la circonferenza del raggio OA, e per altezze le CA, ed HA rispettivamente. C. B. D.

Cor. Paragonando adesso il rettangolo della circonferenza del raggio OA in AC, il qual pareggia la superficie sferica descritta dalla semicirconferenza ABC*, al rettangolo della circonferenza dello stesso raggio OA in AH, il quale è quanto la porzione

* p. 24.

di superficie sferica descritta dall' arco circolare
* p. 27. AEB *; si vede chiaramente, che avendo questi rettangoli per base comune il cerchio del raggio OA debbano esser tra loro come le altezze, cioè come CA ad AH. Val quanto dire, che

La superficie di una sfera stia a quella di un suo segmento, come il diametro della sfera all'altezza del segmento.

fig. 81. Scol. Sia AC il diametro di una sfera, ed ABC il semicerchio generatore di essa: sia poi AE l'altezza di un suo segmento sferico, cioè di quello, che si descrive dal semisegmento circolare ABE; sarà la superficie di una tale sfera all'altra di quel
* c. prec. segmento sferico, come CA ad AE *, cioè co-
* c2.20XI me il quadrato di CA a quello di AB *; o finalmente come il cerchio del raggio CA a quello del
* 2. XII. raggio AB *. Per lo che essendosi dimostrato il cerchio del raggio CA uguale alla superficie della
* sc.p.24. sfera, che descrivesi dal semicerchio ABC *; sarà anche la superficie del segmento sferico descritto dal semisegmento circolare ABE, uguale al cerchio del raggio AB. Ma nel descriversi il segmento sferico dal semisegmento circolare ABE, l'estremo B della AB descrive il cerchio, ch'è base di un tal segmento sferico. Laonde.

La superficie di un segmento sferico è uguale a quel cerchio il cui raggio è una linea retta, che si tiri dal vertice del segmento ad un qualunque punto della circonferenza della base di esso.

Ed è in questo modo, che Archimede esibisce la superficie di un segmento sferico.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Ogni settore sferico è uguale a quel cono, che ha per base quel cerchio, il qual pareggia la superficie sferica, che termina il settore, e per altezza il raggio della sfera.

Sia AEBO quel settore circolare, che rivolgendosi intorno al raggio OA descrive il settore sferico; ed il cono ZXRY abbia la sua base XRY uguale alla superficie sferica generata in tal rivoluzione dall' arco AEB, cioè, al cerchio del raggio AB *, e per altezza la ZM uguale ad OA: dico che questo cono sia quanto quel settore sferico. *fig.* 80. *sc.p.27.

Imperocchè se non è il cono ZXRY uguale al settore sferico, che vien descritto dal settore circolare AEBO, il qual si supponga per ora minore del quadrante; sarà quanto un altro settore sferico maggiore di quello, che descrivesi dal settore circolare AEBO, o pur minore. Sia primieramente minore, e suppongasi perciò uguale a quell' altro settore sferico, che si descrive dal settore circolare *aeb*O minore di AEBO, e costituito con questo nello stesso angolo AOB. Si divida continuamente per metà l' arco esteriore AEB, finchè le corde AE, EB delle sue parti non tocchino l' arco interiore *aeb*; e poi s' intenda rivolgersi il rettilineo AEBO insieme col settore cir-

colare AEBO intorno al raggio OA. E poichè la superficie, che in tal rivoluzione si descrive dalle AE, EB è minore di quella, che descrivesi dall'
* p. 19. arco AEB *; perciò quella superficie sarà rappresentata da un cerchio minore del cerchio XRY, che pareggia questa: sia questo il cerchio *xry* concentrico ad XRY, e su di esso si descriva il cono dell' altezza Mz uguale ad OP, ch' è minore di OA, e quindi anche di MZ; sarà un tal cono uguale al solido, che si descrive dal rettilineo
* p. 23. AEBO *; e perciò maggiore del settore sferico generato dal settore circolare *aeb*O, ossia del cono ZXRY, che si era supposto pareggiare questo settore. Lo che è impossibile. Adunque il cono ZXRY non è minore del settore sferico, che si descrive dal settore circolare AEBO.

Sia perciò maggiore di esso, e quindi uguale a quel settore sferico, il quale vien generato dal settore circolare DFGO maggiore dell'altro AEBO, e costituito nello stesso angolo AOB. Si divida continuamente per metà l' arco DFG, finchè le corde delle sue parti DF, FG non tocchino l'altro arco AEB; e poi s' intenda rivolgersi il rettilineo DFGO intorno ad OD; sarà la superficie, che si descrive dalle DF, FG maggiore della superficie sferica, che vien generata dall' arco
* p. 21. AEB *; e perciò quella tal superficie sarà rappresentata da un cerchio maggiore del cerchio XRY. Sia questo il cerchio SVT, che suppongasi concentrico all' altro XRY, e poi su di esso s' intenda descritto quel cono, che ha l' altezza MN uguale alla perpendicolare OQ, che dal centro O

dell' arco DFG si abbassa sopra una di quelle corde DF. E poichè un tal cono è quanto il solido generato dal rettilineo DFGO * ; sarà esso cono minore del settore sferico, che descrivesi dal settore circolare DFGO, e quindi dell' altro cono ZXRY, che si è supposto pareggiare un tal settore sferico. Lo che è impossibile. Laonde nè pur può il cono ZXRY esser maggiore del settore sferico generato dal settore circolare AEBO : si è poi dimostrato, che non poteva esserne minore. Adunque gli dovrà essere uguale. * p. 23.

Che se il settore sferico proposto fosse stato descritto dal settore circolare BCO maggiore del quadrante : essendo un tal settore sferico la differenza della sfera, e dell' altro settore di questa, che si descrive dal settore circolare AEBO minore del quadrante; sarà perciò quanto la differenza di que' coni, che pareggiano questi solidi; e quindi quanto il cono, che ha per base la superficie sferica descritta dall'arco BC, e per altezza la OA. C.B.D.

Cor. Essendo la sfera, ed un suo settore rispettivamente uguali a due coni, uno, che ha per base un cerchio uguale alla superficie sferica, e per altezza il raggio *, e l' altro, che ha per base quel cerchio, che pareggia la superficie sferica, che termina il settore, e la stessa altezza * ; saranno perciò quei due solidi, come questi due coni; e quindi come le loro basi *, cioè come la superficie della sfera alla superficie della porzione sferica, che termina il settore; o finalmente come il diametro della sfera all' altezza di una tal porzione sferica *.

* p. 27.
* p. 28.
* 11. 12.
* c.p.27.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Ogni segmento sferico è uguale ad un cono, che tien per base quel cerchio, il cui raggio è l' altezza di esso segmento, e per asse la rimanente porzione del diametro accresciuta del raggio.

fig. 81. Rappresenti ABC il semicerchio generatore di una sfera, ed ABE sia quel semisegmento circolare dalla cui rivoluzione intorno ad AE si genera il segmento sferico: dico che questo segmento sferico sia uguale al cono, che ha per base quel cerchio, il cui raggio è l' altezza AE di esso segmento, e per asse la rimanente parte EC del diametro accresciuta del raggio OA.

Imperocchè essendo il quadrato di AB uguale ai quadrati delle AE, EB, anche il cerchio del raggio AB dovrà pareggiare i cerchi, che hanno per
* 2.XII. raggi le AE, EB *; e perciò il cono, che ha per base il cerchio del raggio AB, e per altezza la AO, cioè il settore sferico generato dal setto-
* p. 28. re circolare ABO *, dovrà essere uguale ai due coni i quali hanno per basi i cerchi dei raggi
* c.p.17. AE, EB, e per altezza la medesima AO *: toltone di comune il cono, la cui base è il cerchio del raggio BE, ed EO n' è l' altezza, cioè quello, che si descrive dal triangolo BEO rivolto intorno a EO; o pure aggiungendovelo di comune, secondo che il settore circolare ABO era minore del qua-

drante, o pur maggiore; sarà il segmento sferico descritto da ABE uguale a due coni, dei quali uno ha per base il cerchio del raggio AE, e per altezza AO, e l'altro ha per base il cerchio del raggio BE, e per altezza AE. Or poichè AE sta ad EB, come EB ad EC; sarà AE ad EC, come il quadrato di AE a quello di EB, o come il cerchio del raggio AE a quello del raggio EB * : e perciò il cono, che ha per base il cerchio del raggio AE, e per altezza EC, è uguale all'altro la cui base è il cerchio del raggio BE, ed AE n'è l'altezza *. Laonde sostituendo questo cono a quello; sarà il segmento sferico generato da ABE uguale ai due coni, dei quali ciascuno ha per base il cerchio del raggio AE, ed un di essi ha per altezza AO, l'altro EC; e quindi ad un sol cono, che ha per base quel cerchio, e per altezza le EC, ed AO prese insieme *. C. B. D.

* 2.XII.
* 15.XII
* cp. 16

Scol. In ordine a CE, ch'è l'altezza di uno dei segmenti in cui resta divisa una sfera, alla stessa CE insieme con CO raggio di essa sfera, e ad EA altezza dell'altro segmento sferico si ritrovi la quarta proporzionale M; sarà, permutando, CE ad EA, come EC insieme con CO ad M, e quindi come quel cono, che ha per base il cerchio del raggio EA, e per altezza EC insieme con CO all'altro della stessa base, e che ha M per altezza. Ma questo cono sta poi all'altro, che ha per base il cerchio del raggio BE, e per altezza M, come il cerchio del raggio EA a quello del raggio EB, cioè come EA ad EC. Adunque, per equalità ordinata, starà il cono la cui base è il

cerchio del raggio EA, ed EC insieme con CO n'è l' altezza, al cono che ha per base il cerchio del raggio BE, ed M per altezza, come CE ad EC, cioè in ragion d' uguaglianza. Che perciò siccome quel primo cono si è dimostrato uguale al segmento sferico, che si descrive dal semi segmento circolare CBE *; così a questo stesso segmento sarà pure uguale l'altro cono, che ha per base il cerchio del raggio BE, ed M per altezza. Ed ecco come facilmente si ricava dalla nostra esibizione di un segmento sferico, quella di Archimede, cioè che

* I. p. 29.

Ogni segmento sferico sia uguale a quel cono, che ha la stessa base del segmento, e per altezza la quarta proporzionale in ordine all' altezza dell' altro segmento, a questa stessa accresciuta del raggio della sfera, e all' altezza del segmento proposto.

FINE.

LA MISURA
DEL
CERCHIO.



NAPOLI



1812.

PREFAZIONE.

Il cerchio, ch' è dopo le figure rettilinee la più semplice, era naturale, che dovesse eccitar subito dopo queste la curiosità dei Geometri in cercarne la misura. Sapendo già essi, che l' aja di un poligono regolare iscritto in un cerchio era uguale al rettangolo del suo perimetro nella metà della distanza di uno de' suoi lati dal centro del cerchio in cui era iscritto; passando dai poligoni iscritti al cerchio stesso, non dovettero stentar molto a dimostrare, che il cerchio era quanto il rettangolo della sua circonferenza nella metà del raggio; e quindi a ridurre il Problema della quadratura del cerchio a quello della rettificazione della circonferenza.

Tra i molti tentativi, che furon fatti per la rettificazione della circonferenza, il primo di cui ci sia pervenuta notizia è quello di Dinostrato, fratello del Geometra Menecmo particolar discepolo di Platone. Egli si valse in questa ricerca di una curva, che per la proprietà che aveva di quadrare il cerchio, fu chiamata *Quadratrice*; e forse perchè Dinostrato fu il primo a ravvisarvela, fu perciò detta di Dinostrato. E di una tal curva si valsero anche a quest' oggetto Nicomede, e molti altri geometri della Scuola Platonica. Ma questa maniera di quadrare il cerchio fu ben presto riconosciuta come poco soddisfacente, e poco geometrica; mentre per la

genesi di una tal curva si esigeva un certo moto, ed una determinata velocità di un punto, la quale non poteva esibirsi senza prima ammettere la rettificazione della circonferenza; e volendo ottener tal curva geometricamente, bisognava ricorrere a quei luoghi, che gli antichi dicevano alla superficie; o pur descriverla per mezzo di una linea spirale descritta in un piano: e l' una, e l'altra di queste considerazioni era molto vaga, e poco conducente alla vera soluzione del Problema: esse non erano però dispregevoli, nè lo sono tuttavia, avendo dato luogo alla scoperta di una proprietà importante della quadratrice. In generale gli sforzi, ed i tentativi di un vero geometra, se non lo fanno riuscire in quello, che cerca, non sono però mai perduti, ed infruttuosi.

Il Problema della quadratura del cerchio era dunque ai tempi di Archimede ancora tra le cose desiderate dai Geometri; ed è perciò che quest' uomo sommo, dotato di un ingegno fatto per eseguire tutto ciò, ch' era nuovo, ed arduo, avendo intrapreso a risolverlo, diede il primo, con una destrezza singolarissima per quei tempi, un approssimante rapporto del diametro del cerchio alla circonferenza, e del cerchio al quadrato circoscritto ad esso. Il primo di tali rapporti, del quale molti si avvalgono in pratica, anche a dì nostri, perchè proposto in termini ristrettissimi, è quello di 7 a 22; e l'altro, che deducesi facilmente dal primo, è quello di 11 a 14. Non vi mancarono però anche in quei tempi felici per la Geometria molti, che indegni affatto del nome di Geo-

metri, pretesero di aver ritrovato in diversi modi l' esatta quadratura del cerchio. Ed i loro paralogistici ragionamenti, che non ci sono per buona fortuna pervenuti, possono scusare alquanto i tempi nostri, nei quali di questi falsi quadratori, appena iniziati nella Geometria, spesso spesso se ne schiudono.

Chi desidera una completa, ed insieme dilettevol notizia delle varie ricerche sulla quadratura del cerchio potrà leggere un Opuscolo del Sig. Montucla, che trovasi anche inserito nella fine del secondo volume della sua Storia delle Matematiche, edizione del 1792. Per me basta solamente l' avvertire, che dal Wallis in poi, tutti i sommi Geometri Moderni, tra i quali il Nevvton, il Leibnitz, Giacomo Gregory, ed Huyghens, si sono occupati ad escogitare dei metodi ingegnosissimi, per approssimare nella maniera più grande possibile la circonferenza del cerchio. E che Lagny portò quest' approssimazione sino a farla differire dalla vera circonferenza per meno di un fratto, il cui numeratore fosse l' unità, ed il denominatore un numero composto di 128 cifre decimali; in modo tale che, come si esprime il Signor Montucla, l' errore su di un cerchio del diametro cento milioni di volte maggiore di quello della sfera delle stelle fisse, supponendo la parallasse dell' orbe terrestre solamente di un secondo, sarebbe più bilioni di bilioni di volte minore del diametro di un capello. Approssimazione, che spaventa, e della quale non avendosene alcun bisogno in pratica, non

serve ad altro, che a provare l' estrema pazienza di quello, che se n'era occupato, e l' attività del metodo, che gliel' aveva fatto ottenere. Contuttociò l' Eulero ha mostrato co' suoi metodi, che l' approssimazione del Lagny poteva spingersi anche più oltre, ed ottenersi con artifizj di calcolo anche più attivi. E ciò è sufficiente a far conoscere, con quanto poco buon senso tanti a giorni nostri, perdono inutilmente il loro tempo in paralogistiche ricerche sul Problema della quadratura del cerchio.

Senza però ricorrere ai Metodi proposti dai sommi Analisti Moderni, i quali implicano delle ricerche sulle serie, mi sono attenuto in questo Libro della *Misura del Cerchio* al metodo di Giacomo Gregory, ricavato dai soli principj di Geometria, e condotto a fine con ovviissime operazioni Aritmetiche; poichè un tal metodo è molto semplice, e facile, e dà un' approssimazione per gli usi pratici più che sufficiente, ed esatta.

LA MISURA DEL CERCHIO

DEFINIZIONI.

1. Una figura curvilinea si dirà essersi *quadrata*, se ella per mezzo di una geometrica costruzione è trasformata in un' altra rettilinea.

Poichè a quest' ultima figura può sempre esibirsi un quadrato uguale *. * 14. II.

2. E si dirà *rettificata* una curva, se con geometriche operazioni si rinvenga una linea retta, che la pareggi.

Scol. La quadratura di uno spazio curvilineo è o *esatta*, o per *approssimazione*. Si dice esatta, allorchè la figura rettilinea pareggia lo spazio curvilineo a rigor geometrico, e senza averne trascurata veruna, abbenchè minima, quantità; ed è per approssimazione quando si rinviene una figura rettilinea, che differisca dallo spazio curvilineo per una quantità piccolissima, e per conseguenza trascurabile. E lo stesso deve dirsi convenevolmente per la rettificazione di una curva.

LEMMA I.

Ogni poligono di un numero pari di lati uguali iscritto in un cerchio, è medio proporzionale tra quell' altro poligono regolare iscritto nel cerchio stesso, che ha la metà di lati, ed il poligono circoscritto simile a questo.

fig. 82. Sia DB il lato di un poligono di un numero pari di lati uguali, iscritto nel cerchio DBE; e da un estremo D dell'arco DB si abbassi sul raggio OB, che passa per l' altro estremo, la perpendicolare DF, la qual si produca sino alla circonferenza in E; sarà l' arco BE uguale all' arco
* 30.III. BD *; e quindi la DE dinoterà il lato di quel poligono regolare iscrittibile nel cerchio DBE, che ha la metà di lati del già iscritto. Finalmente per lo punto B si tiri ad un tal cerchio la tangente ABC, la quale si arresti ai raggi OD, OE, che passano per gli estremi dell' arco DBE; sarà questo il lato del poligono circoscrittibile al cerchio DBE, simile all' iscrittibile del lato DE; la qual cosa può facilmente rilevarsi dal Lib. IV. di Euclide. Or io dico, che i poligoni i quali hanno per loro lati le DE, DB, AC sieno continuamente proporzionali.

E poichè i triangoli DFO, ABO sono rispettivamente uguali agli altri OFE, OBC; perciò saranno essi triangoli DFO, ABO le metà degli altri DOE, AOC. Laonde dividendosi i poligoni, che hanno per lati le DE, AC in tanti tri-

angoli, come DOE, AOC, quanti sono i loro lati; si divideranno per conseguenza in tanti triangoli, come DFO, ABO, quanti ne dinota il doppio numero de' lati di essi, cioè il numero di quelli del poligono del lato BD. Ma lo stesso numero di volte si contiene anche il triangolo DOB in quest' ultimo poligono. Adunque i triangoli DFO, DOB, ABO sono tre grandezze, delle quali ne sono ugualmente multiplici rispettivi il poligono del lato DE, quello del lato DB, e l' altro del lato AC: e perciò questi poligoni saranno tra loro come quei triangoli *. Or il triango- * 15. V.
lo DOF sta all' altro DOB, come la base OF alla base OB, per essere ugualmente alti *; e quin- * 1. VI.
di come OD a OA *; ed in questa stessa ragione * 2. VI.
è pure il triangolo DOB al triangolo BOA, per aver essi il loro vertice comune in B: che perciò il triangolo DOF starà al triangolo DOB, come questo triangolo DOB all' altro AOB, cioè i tre triangoli DOF, DOB, BOA saranno continuamente proporzionali; e quindi anche continuamente proporzionali saranno i poligoni, che hanno rispettivamente per lati le DE, DB, AC, i quali si sono dimostrati proporzionali ad essi triangoli DOF, DOB, AOB. C. B. D.

LEMMA II.

Ogni poligono di un numero pari di lati uguali, circoscritto ad un cerchio, è quarto proporzionale in ordine alla somma de' due poligoni iscritti in questo cerchio, l'uno simile al già circoscritto, e l'altro, che ha la metà del numero di lati, al doppio di questo, ed all' altro poligono circoscritto, che gli è simile.

fig. 82. Si supponga fatto lo stesso apparecchio del Lemma precedente, e sieno DB, DE i lati dei due poligoni iscritti nel cerchio DBE, ed AC un lato di quel poligono circoscritto, ch' è simile all' iscritto del lato DE: e di più si tirino al cerchio DBE, per gli punti D, E, le tangenti DL, EH; sarà LH il lato dell' altro poligono circoscritto simile all' iscritto del lato DB, cioè sarà LH il lato di quel poligono regolare circoscritto al cerchio DBE, che ha doppio numero di lati del già circoscritto. Or io dico, che questo poligono del lato LH sia quarto proporzionale in ordine ai due poligoni iscritti, cioè quelli, che hanno per lati le DB, DE, al doppio di questo del lato DE, ed al poligono circoscritto del lato AC.

Si congiunga OL. E poichè i due triangoli LDO, LBO hanno tutti i loro lati uguali; perciò essi saranno anche uguali, e l'angolo DOB resterà bisegato dalla LO: per la qual cosa starà AO ad OB, o pure OD, come AL ad LB *.

* 3. VI. Ma AO sta ad OD, come il triangolo ABO al

triangolo DBO *, o pure come questo triangolo * 1. VI.
DBO all' altro DOF *; ed AL sta ad LB, come * l. prec.
il triangolo AOL al triangolo LOB *. Adunque * 1. VI.
starà il triangolo DBO al triangolo DOF, come
il triangolo AOL all' altro LOB: e componendo,
i due triangoli DBO, DOF staranno al triangolo
DOF, come il triangolo AOB al triangolo LOB.
Ma il triangolo DOF sta al suo doppio, come il
triangolo LOB al doppio di esso *, cioè al qua- * (15. V (e 16. V
drilatero DOBL. Laonde le tre grandezze, cioè
i due triangoli DOB, DOF insieme, il triangolo
DOF, ed il doppio di questo stesso triangolo DOF
sono in ordinata ragione con tre altre grandezze,
cioè col triangolo AOB, col triangolo LOB, e col
quadrilatero DOBL; e quindi, per equalità, dovrà
stare il triangolo DOB insieme coll' altro DOF al
doppio di esso DOF, come il triangolo AOB al
quadrilatero DOBL. Per la qual cosa, essendosi
dimostrato, che i poligoni i quali hanno per lati
rispettivamente le DB, DE, AC sieno ugualmente
multiplici dei triangoli DOB, DOF, AOB *; e * dim. l. pr.
potendosi facilmente dimostrare, che il poligono
del lato LH sia pure ugualmente multiplice del
triangolo LOH, e quindi del quadrilatero DOBL,
che a questo triangolo è uguale, per essere ambedue
doppj dello stesso triangolo LOB; ne segue,
che dovendo aver luogo tra gli ugualmente
multiplici la stessa proporzione, che tra le parti *,
debba perciò stare il poligono del lato DB * 15. V.
insieme con quello del lato DE al doppio del poligono
del lato DE, come il poligono del lato
AC al poligono del lato LH. C. B. D.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se si prenda per unità il raggio di un cerchio; un tal cerchio, con un' approssimazione di meno di una diecimilionesima, sarà espresso da 3, 1415926 *quadrati del raggio*.

Essendosi preso per unità il raggio del cerchio; il quadrato del raggio dinoterà l' unità quadrata, della quale, ne farà doppio il quadrato iscritto nel cerchio, e quadruplo il circoscritto. Quindi se tal unità quadrata si concepisca divisa in 1,0000000 di parti uguali; il quadrato iscritto in un tal cerchio sarà espresso da 2,0000000, e'l circoscritto da 4,0000000. E trovando aritmeticamente un medio proporzionale tra i due numeri 2,0000000, e 4,0000000; un tal medio proporzionale, ch' è 2,8284271 esprimerà in quadrati del
* l. 1. raggio l'ottagono iscritto *. Ed il quarto proporzionale 3,3137085 in ordine alla somma di que' numeri, che si è poc' anzi veduto rappresentare l' ottagono, e 'l quadrato iscritto, al doppio di questo, ed al numero, che esprime il quadrato circoscritto, dinoterà anche in quadrati del raggio
* l. 2. l' ottagono circoscritto *. Similmente passando, col mezzo dei due precedenti Lemmi, dall' ottagono iscritto, e circoscritto ad un tal cerchio, prima alla figura di 16 lati iscritta, e poi allacircoscritta, e così continuando successivamente, si troverà esser

la fig. di 16 *lati iscr.*	3,0614674, *e la circosc.*	3,1825979
32	3,1214452	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Donde chiaramente apparisce, che le due figure ciascuna di 32768 lati uguali, una iscritta, e l'altra circoscritta al cerchio, fino alle loro parti diecimilionesime non si differiscono affatto tra loro, essendo espresse dallo stesso numero 3,1415926; ond'è, che la loro differenza dovrà consistere in parti più piccole di una diecimilionesima del quadrato del raggio. E perciò anche il cerchio, ch'è medio tra queste due figure dovrà essere espresso da 3,1415926 quadrati del raggio. C. B. D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Un cerchio sta al quadrato del suo diametro come 3,1415926 *a* 4,0000000.

Essendo i cerchi come i quadrati de' diametri *; * 2.XII.
starà, permutando, un cerchio al quadrato del

suo diametro, come un altro cerchio al quadrato del diametro suo. Ma nel teorema precedente una tal ragione per lo cerchio del raggio 1 si è trovata esser quella di 3,1415926 a 4,0000000: poichè eran questi i numeri, che si è veduto esprimere il cerchio, ed il quadrato del diametro. Laonde questa stessa dovrà esser la ragione di un qualunque altro cerchio al quadrato del suo diametro. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il diametro di un cerchio, sta alla sua circonferenza, come 1 a 3,1415926.

Imperocchè essendo il quadrato del diametro duplo del rettangolo del diametro stesso nel rag-
* 1. VI. gio *, sarà quadruplo del triangolo rettangolo, che ha per lati intorno all' angolo retto un tal diametro, e il raggio; poichè questo triangolo è
* 34. 1. anche metà di quel rettangolo *. Adunque starà questo triangolo al quadrato del diametro, come 1 a 4. Ma è poi il quadrato del diametro al cerchio come 4,0000000 a 3, 1415925. Laonde, per equalità, quel triangolo starà al cerchio, ossia ad un altro triangolo rettangolo, che ha per lati intor-
*3. Arch. no all' angolo retto la circonferenza ed il raggio *, come 1 a 3,1415926. Che perciò essendo questi
* 1. VI. triangoli come le basi *; starà anche il diametro alla circonferenza, come 1 a 3, 1415926. C.B.D.

FINE.

NOTE
CRITICHE, E GEOMETRICHE
SULL' UNDECIMO E DUODECIMO LIBRO
DEGLI
ELEMENTI DI EUCLIDE

Le quali rendono ragione de' cambiamenti, che in questa edizione si sono fatti nel Testo Greco, o pure contengono delle osservazioni in alcune Proposizioni.

Seguite da alcune altre riflessioni sul nostro libro della sfera e del cilindro, e sull' altro della misura del cerchio, col confronto di questi con quelli originali di ARCHIMEDE.

NAPOLI

1812.

N O T E ec.

ALLA DEF. IX. DEL LIB. XI.

Questa definizione nel Testo Greco è l'undecima del Lib. 11., ed è preceduta da quella de' solidi simili, e degli uguali e simili. Noi abbiamo dovuto invertire un tal ordine per premetterla a queste, in cui ne abbisognavamo; nè crediamo di esserci, così facendo, allontanati dal vero metodo di Euclide. In effetto nel Libro 1. degli Elementi di questo Geometra si trova la definizione dell' angolo piano premessa a quella delle figure rettilinee; quantunque in definir queste non si dovesse tener conto degli angoli. E perchè non avrebbe egli dovuto serbare lo stesso ordine nel Libro 11.? Se dunque questa def. del Lib. 11. si trova posposta a quella delle figure solide, abbiamo tutto il fondamento di credere esser ciò avvenuto per causa degli antichi espositori, i quali hanno in mille luoghi corrotto il Testo di Euclide. La nostra definizione è poi diversa un poco dalle due seguenti, che si trovano nel Testo Greco, e delle quali ci è sembrata essere più precisa.

DEF. XI. LIB. XI. EUCL.

Solidus angulus est plurium quam duarum linearum, quae se se contingant, et non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel *solidus angulus est qui pluribus quam duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, et ad unum punctum constitutis.*

Inoltre la nostra definizione, contiene anche espressa la condizione, che i lati dell' angolo solido sieno *linee rette*; il che non si trova indicato nelle definizioni attribuite ad Euclide, e che tutti i suoi Comentatori hanno ritenute: e si sa, che oltre questi angoli solidi la Geometria non ne considera altri.

ALLA DEF. X. DEL LIB. XI.

Nel Testo di Euclide una tal definizione, ch'è la 9, si trova fatta nel seguente modo

DEF. IX. LIB. XI. EUCL.

Similes figurae solidae sunt, quae similibus planis multitudine æqualibus continentur.

Or dalla nozione che si è già ricevuta della similitudine nel 6. libro per le figure piane, e che in questo luogo deve corrispondere a quella che se ne dà per le solide, si rileva, che queste dovrebbero divenire identiche (*uguali, e simili*), sol che i piani i quali si suppongono simili si facciano anche uguali; cioè sol che si supponga, che due lati omologhi di due di esse figure simili sieno uguali: il che supporrebbe, che gli angoli solidi contenuti dallo stesso numero di angoli piani rispettivamente uguali, e similmente disposti sieno necessariamente uguali; la qual cosa doveva esser dimostrata, e non assunta: molto più, perchè non essendo generalmente vera questa proprietà degli angoli solidi, poc' anzi detta, come sarà dimostrato nella nota alla Prop. A di questo libro, si poteva giustamente dubitare, che forse dalla similitudine delle figure solide non si passasse all' uguaglianza loro, col supporre, che

i piani i quali terminano esse figure, divenissero uguali. E da ciò si vede, che la definizione rapportata negli Elementi di Euclide per le figure solide simili non sia completa, e che per renderla tale bisognava necessariamente aggiugnervi, come dal Simson, e da noi si è fatto, l'altra condizione, che gli angoli solidi corrispondenti sieno uguali. Che anzi una tal condizione si rende anche necessaria, affinchè l'idea di similitudine già data nel Lib. 6 consenta con quella, che se ne dà in questo luogo. Or in quel Libro, per le figure piane si richiedeva, che oltre alla proporzionalità de' lati, fossero anche uguali gli angoli corrispondenti di tali figure; ed in questa si doveva perciò esigere, che oltre alla similitudine de' piani, che terminano le figure solide, fossero anche uguali gli angoli solidi di esse.

ALLA DEF. XI. DEL LIB. XI.

Dalla precedente nota si rileva chiaramente; che la seguente enunciazione di Euclide: *Aequales et similes figurae solidae sunt quae similibus planis, multitudine, et magnitudine aequalibus continentur*, non possa esser mai una definizione, come vien rapportata nel Testo Greco, ov' è la 10 del Lib. 11; ma che sia un Teorema da dimostrarsi vero, o falso. Roberto Simson crede, che Teone, o altro antico editore, siasi fatto ingannare da una falsa evidenza, e di una proposizione ne abbia fatta una definizione; e molto a proposito soggiugne: *Quamvis igitur verum esset figuras solidas quæ similibus planis, multitudine, et magnitudine*

æqualibus continentur, inter se æquales esse, merito tamen culpandus est is, qui ex hac propositione demonstranda definitionem fecit. E questo ragionamento del Simson vien comprovato dallo stesso Euclide; mentre quest' accurato Geometra ne' suoi Elementi Piani dimostrò, e non assunse, che due triangoli i quali hanno i lati rispettivamente uguali sieno uguali: e se troviamo per prima definizione del Lib. 3, che *cerchi uguali sono quelli, che hanno uguali raggi*; ciò niente può provare in favor di coloro, che hanno ritenuta nel Libro 11. la def. 10. (*Vegg. la Nota alla def.* 1. *Lib.* 3.). Ma ha poi ragione il Simson di esclamare? *Quid autem dicendum si hæc propositio non vera sit? nonne confitendum est Geometras per mille tercentos annos in hac rè elementari deceptos fuisse?* La maniera nella quale egli si sforza di provarlo, sebbene concludente, è pure una sottigliezza aliena dalla purità geometrica, e da quella semplicità, che deve porsi negli Elementi di questa scienza. Del resto una tal quistione non contribuisce per niente al nostro scopo di render gli Elementi di Euclide senza neo; e perciò noi la tralasciamo.

ALLE DEFF. XVIII., E XXI. DEL LIB. XI.

Chiunque sa, che le cose, che si contengono in un libro elementare di Geometria non debbono esser mai più generali dell' applicazione, che deve farsene, e che quindi le definizioni debbono essere ad esse proporzionate; non dimanderà certamente, perchè mai Euclide abbia definito

particolarmente il cono, ed il cilindro, cioè il solo *cono*, *e cilindro*, che, data la definizione generale di questi solidi, si direbbero *retti*. Ed ognuno, che per poco è versato nelle cose geometriche sa bene, che le poche verità, che si contengono nel Libro 12. circa il rapporto di questi solidi, sono le sole, delle quali occorre servirsi nell' intero Corso delle Matematiche: che perciò, sebbene esse si appartenessero ugualmente al cono, ed al cilindro in generale, e che il rilevarle sì generalmente, che particolarmente sia lo stesso, come potrà vedersi presso Clavio e Commandini; purtuttavia Euclide, per ragion di metodo, e per una certa semplicità elementare, si contentò dimostrarle per lo cono, e per lo cilindro retto solamente: e quindi non dovè dare, che le definizioni di questi solidi, e non già quelle del cono, e del cilindro in generale. Di più l' aver ritenute per questi solidi le definizioni Euclidee, com' era conveniente, per ciò che poc'anzi si è detto, ci ha anche procurato l'altro vantaggio di non essere stati obbligati nel Libro sulla Sfera e sul Cilindro ad aggiugnere, ogni volta, che si è parlato del cono, eccetto che nella Prop. 14., la condizione ch' esso sia retto, cioè *isoscele*, come lo chiama Archimede; mentre le verità ch' egli dimostra per questo solido, ad una tal sola sua specie, e non già al cono in generale, si appartengono.

ALLA PROP. II. DEL LIB. XI.

Nel Testo di Euclide la prima parte di questa Proposizione si trova enunciata nel seguente modo: *Ogni triangolo è in un piano*. Or non

essendo concepibile, che Euclide abbia voluto in questo luogo dimostrare ciò, che aveva assunto ne' primi sei Libri; bisogna supporre, che tal Prop. sia stata da taluno mutata, e viziata: che perciò noi ad imitazione del Simson abbiamo cambiata quell' enunciazione in quest' altra: *Tre punti, che non stieno per dritto, sono in un piano*, e per la dimostrazione di una tal verità ci siamo serviti di quell' istesso semplicissimo ripiego, del quale si era avvaluto il Simson.

alla Prop. III. del lib. XI.

Questa Prop. si trova dimostrata ne' nostri Elementi in una maniera diretta, ed anche più semplice di quella di Euclide.

alla Prop. VII. del lib. XI.

Questa Prop. è stata senza dubbio intrusa nel Testo Greco da qualche antico espositore, per un mal' inteso rigore. Imperciocchè la verità, che in essa si dimostra, cioè che: *La linea retta che unisce due punti presi in due linee rette parallele, cade nel piano di queste*, o ch'è lo stesso, che: *La linea retta che unisce due punti presi in un piano, cade nel piano stesso*, è compresa nella natura della linea retta, e del piano, ed è stata varie volte assunta dallo stesso Euclide; del che potrà vedersene un esempio nella Prop. 30. Lib. I. E ciò mostra chiaramente, ch' Euclide non credè mai necessario il dimostrarla.

Inoltre la dimostrazione di una tal Prop. 7. è

fondata sulla 3. del libro stesso, nella quale ben due volte si assume da Euclide ciò, che nella 7. si vuol dimostrare: e lo stesso si trova anche assunto nella dimostrazione della Prop. 6.

ALLA PROP. XX. DEL LIB. XI.

Nel principio di questa dimostrazione si trova nel Testo Greco: » ma se non lo è, sia BAC il maggiore ». Or siccome l' angolo BAC può essere uguale ad uno de' rimanenti, si è perciò da noi, e dal Simson detto » ma se non lo è, sia l' angolo BAC non minore di uno qualsivoglia de' rimanenti; maggiore però di DAB. *fig.* 18.

ALLA PROP. XXI. DEL LIB. XI.

È qui a proposito il far rilevare, che non possono costituirsi altri angoli solidi con angoli piani di figure rettilinee regolari, che cinque solamente. In fatti dagli angoli piani del triangolo equilatero si possono costituire tre angoli solidi diversi, combinandone insieme tre, quattro, o cinque: perchè fino a questa somma si ha sempre una quantità minore di quattro retti; mentre da sei in poi tal quantità si fa uguale a quattro retti, o maggiore. È chiaro ancora, che dagli angoli del quadrato non possa costituirsi, che semplicemente quell' angolo solido, ch' è contenuto da tre di essi: e si potrà pure costituire un angolo solido con tre angoli del pentagono regolare insieme presi; poichè questi fanno meno di quattro

Al contrario non se ne potrà costituire uno

da tre angoli dell' esagono regolare, che fanno già quattro retti; e molto meno se ne potrà ottenere uno con tre angoli dell' ettagono regolare, o di altra figura regolare di maggior numero di lati.

Or il primo de' cinque summentovati angoli è quello del *tetraedo*; il secondo dell' *ottaedro*; il terzo dell' *icosaedro*, che, come si detto nelle definizioni 26, 27, e 29 del Lib. 11., sono figure solide terminate da triangoli equilateri. Di più l' angolo solido compreso da tre angoli retti si appartiene al *cubo*, ed al *dodecaedro* quello, ch' è contenuto da tre angoli del pentagono regolare. Ma eccone di queste cinque figure solide un' elegante costituzione, ricavata dal Lib. 13. degli Elementi dello stesso Euclide.

LEMMA I. (Prop. 4. lib. XIII. Eucl.)

Se una linea retta sia divisa in estrema e media ragione; i quadrati della tutta, e della parte minore sono tripli di quello della parte maggiore.

fig. 1. *N.* Sia la retta AB divisa in C, come si è detto; sarà il quadrato di AB insieme con quello di BC uguale al doppio rettangolo di AB in BC insieme col quadrato di AC * : ma il rettangolo di AB in BC è uguale al quadrato di AC; e quindi il doppio di quello al doppio di questo. Dunque il quadrato di AB insieme con quello di BC è triplo del quadrato di AC. C. B. D.

* 7. II.

LEMMA II. (Prop. 5. lib. XIII. Eucl.)

Se una linea retta si divida in estrema, e media

ragione, e poi gli si aggiunga p[illegible]dritto il maggior segmento: l' intera linea retta sarà anche divisa in estrema, e media ragione; ed il segmento maggiore sarà quella linea, che si era posta da principio.

Sia la linea retta BA divisa in C in estrema, e media ragione, e per dritto ad essa si ponga la AD uguale alla AC. *fig.2. N.*

E poichè BA sta ad AC, come AC a CB; sarà, invertendo, AC a BA, come CB ad AC, e componendo BD a BA, come BA ad AC, ossia ad AD; e perciò la BD è divisa in estrema, e media ragione in A, ed AB è il maggior segmento. C. B. D.

LEMMA III. (Prop. 12. lib. XIII. Eucl.)

Se in un cerchio vi s' iscriva un triangolo equilatero; il quadrato di un lato di questo triangolo sarà triplo di quello del raggio del cerchio.

Sia ABC il triangolo equilatero iscritto nel cerchio ABC, il cui raggio AD si prolunghi in E, e si unisca la BE. E poichè ABC è un lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio ABC; sarà l' arco BEC la terza parte della circonferenza: quindi l' arco BE, ch' è metà di BEC ne dinoterà la sesta parte; e perciò la congiungente BE, essendo il lato dell' esagono regolare iscritto in questo cerchio, pareggerà il raggio AD *. Or il quadrato di AE, ch' è quadruplo di quello di AD, essendo uguale ai quadrati di AB, e BE, saranno questi anche il quadruplo del quadrato di AD. Per lo che se da' quadrati AB, BE se ne tolga quello *fig.3. N.* *c.15.IV.

di BE, e dal quadruplo del quadrato di AD se ne tolga uno di essi; dovrà restare il quadrato di AB uguale a tre quadrati di AD: e perciò quel quadrato sarà triplo dell' altro di AD. C. B. D.

LEMMA IV. (Prop. 7. lib. XIII. Eucl.)

Se tre angoli di un pentagono equilatero sieno uguali, o che si succedano, o no: il pentagono sarà equiangolo.

fig. 4. *N.* Sieno primieramente uguali gli angoli successivi in A, B, C del pentagono ABCDE: si conducano le AC, BE, FD. E poichè le due CB, BA sono uguali alle due EA, AB, e che l' angolo CBA è uguale all' angolo BAE; sarà CA uguale a BE, l' angolo BCA uguale all' angolo AEB, e l' angolo BAC, o sia BAF uguale all' altro ABE, o sia ABF. Laonde, essendo uguali gli angoli BAF, ABF, sarà AF uguale ad FB, e per conseguenza anche FC sarà uguale ad FE. Adunque essendo CF uguale ad FE, CD uguale a DE, e DF comune; sarà l' angolo FCD uguale all' altro FED. Ma era anche FCB uguale ad FEA: quindi sarà tutto l' angolo BCD uguale all' altro AED, e perciò questo angolo pareggerà ancora ciascun di quelli in A, ed in B. Similmente si dimostra, che ad essi sia uguale l' angolo CDE: dunque il proposto pentagono sarà equiangolo.

Non sieno ora contigui gli angoli uguali; ma sì bene sieno essi quelli in A, C, D: si unisca BD. E poichè le due BA, AE sono uguali alle due BC, CD, e comprendono angoli uguali,

sarà la base BE uguale alla base BD, l'angolo AEB all' angolo CDB, e l' angolo ABE all' altro CBD: ma è pure l' angolo BED uguale all' angolo BDE; poichè si è dimostrata BE uguale a BD. Adunque tutto l' angolo AED sarà uguale a tutto l' altro CDE, e perciò anche a quelli in A, C; ai quali si dimostrerà similmente essergli uguale l'angolo ABC. Quindi il proposto pentagono è equiangolo. C. B. D.

LEMMA V. (Prop. 10 lib. XIII. Eucl.)

Il quadrato del lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio è uguale ai quadrati de' lati dell' esagono, e del decagono regolare iscritti nel cerchio stesso.

Rappresenti AB il lato del pentagono regolare iscritto nel cerchio ACD, ed alla AB si abbassi dal centro F la perpendicolare FH, che si produca in K, e si uniscano le KB, KA, BF, FA; sarà KA, o KB il lato del decagono iscritto in un tal cerchio: finalmente si abbassi su di AK la perpendicolare FLM, si unisca KN, e si prolunghi AF in G. *fig.5. N.*

E poichè AB è il lato del pentagono, sottenderà esso la quinta parte della circonferenza, ossia $\frac{2}{5}$ parti della semicirconferenza; e perciò se si applichi nel semicerchio ABCG la BC uguale alla AB, il rimanente arco CG dovrà essere la quinta parte della semicirconferenza, cioè uguale ad AK. Ma l'arco AK è doppio dell'altro KM: dunque anche l' arco CG sarà doppio dell' altro KM. E perciò tutto l'arco BG sarà anche doppio dell'altro

BM; e quindi anche l' angolo BFG dovrà esser doppio dell' altro BFM. Ma un tal angolo
* 20.III. GFB è pur doppio dell' angolo FAB *: perciò sarà l' angolo BFN uguale all' altro BAF; ed i triangoli BFA, BFN, che hanno i già detti angoli uguali; e l' angolo ABF di comune, saranno equiangoli, e perciò simili. Laonde sarà AB a BF, come BF a BN; ed il rettangolo ABN pareggerà il
* 16.VI. quadrato di BF *. Or poichè AL è uguale ad LK, e la NL è comune, e perpendicolare alla KA; sarà KN uguale ad NA, e l' angolo LKN anche uguale all' altro LAN. Ma l' angolo LAN è u-
* 5. I. guale all' angolo KBN *; perciò anche l' angolo LKN sarà uguale a KBN: è poi l' angolo NAK comune ai due triangoli AKB, AKN; dunque il triangolo AKB è equiangolo all' altro KNA, e perciò BA sta ad AK, come KA ad AN; ed il rettangolo BAN sarà uguale al quadrato di AK. Laonde essendosi già dimostrato il rettangolo ABN uguale al quadrato di BF; i due rettangoli ABN, BAN insieme presi, cioè il quadrato di AB, pareggerà i quadrati di BF, e di AK. C. B. D.

PROP. I. PROBL. (Prop. 13. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un tetraedro.

fig. 6. Si esponga una qualunque retta AB, dalla quale
* 9. VI. se ne tagli la terza parte BC *; poi si descriva su di essa il semicerchio ADB, nel quale si tiri la CD perpendicolare al diametro. Ciò posto si esponga il cerchio EFG, che abbia per raggio una retta uguale a CD, e descritto in esso il triangolo equi-

latero EFG si elevi dal centro H la HK perpendicolare al piano del cerchio, ed uguale alla AC; e finalmente congiungansi le KE, KF, KG: dico che la piramide EFGK sia un tetraedo.

E poichè la KH è perpendicolare al piano EFG, e quindi alle rette HE, HF, HG *; perciò i triangoli rettangoli KHE, KHF, KHG avendo uguali i loro cateti, avranno anche uguali le ipotenuse KE, KF, KG, e di più ciascuna di queste, com' è chiaro, pareggerà la AD. Or per gli triangoli simili ADC, DBC deve stare AD a DC, come DB a BC; e quindi saranno anche proporzionali i quadrati che da tali rette descrivonsi *; ma il quadrato di DB sta a quello di BC, come AB a BC; perciò in questa ragione sarà pure il quadrato di AD a quello di DC. Laonde essendo AB tripla di BC, sarà anche il quadrato di AD triplo di quello di DC: ma è poi il quadrato di EF triplo di quello di EH*, ed è EH uguale a DC. Dunque sarà il quadrato di AD uguale a quello di EF; e perciò AD pareggerà EF. Per la qual cosa le KE, KF, KG, EF, FG, GE essendo tutte uguali, i triangoli EFG, EKF, FKG, GKE saranno tutti equilateri, ed uguali: e quindi il solido FGEK sarà un tetraedo *. C. B. F.

*d.3.XI. *22.VI. *l. 3. *d.26.XI.

PROP. II. PROBL. (Prop. 14. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un ottaedro.

Si esponga il quadrato EFGH, nel quale si tirino le diagonali EG, FH, che si divideranno in parti uguali in K, e ad angoli retti *: indi dal punto K si tiri al piano EFGH la perpendicolare

fig. 7. N. *d.9.IV.

* 12.XI. MKL *, che si prolunghi dall' una, e dall' altra parte del piano in L, M, e tagliate da essa le KL, KM uguali ad una delle KE, KF, KG, KH, si uniscano le LE, LF, LG, LH, MF, ME, MG, MH: dico che il solido contenuto dagli otto triangoli ELF, FLG, GLH, HLE, EMF, FMG, GMH, HME sia un ottaedro.

Imperocchè essendo EK uguale a KH, e l' angolo in K retto; sarà il quadrato di EH doppio di quello di EK: e di nuovo essendo EK uguale a KL, e l' angolo in K retto; sarà il quadrato di EL doppio di quello di EK. Laonde sarà il quadrato di EL uguale a quello di EH, ed EL uguale ad EH. Similmente si dimostra che LH sia uguale ad HE; quindi il triangolo ELH è equilatero. E nel modo stesso dimostrandosi, che sieno equilateri gli altri triangoli, che hanno per basi i lati del quadrato EFGH, e per vertici i punti L, M; ne segue, che si è in tal modo costi-
*d.27.XI. tuito un ottaedro *. C. B. F.

PROP. III. PROBL. (Prop. 15. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un cubo.

fig. 8. *N.* Si esponga il quadrato FGML, e poi dai vertici F, G, M, L de' suoi angoli si elevino al piano di esso le perpendicolari FE, GH, MN, LK, ciascuna delle quali si tagli uguale ad un lato del quadrato proposto. Finalmente si uniscano le EK, KN, NH, HE; si verrà in tal modo a costituire il solido GK terminato da sei quadrati GL, LE, EN, NG, GE, MK, che per-
*d.25.XI. ciò è un cubo *. C. B. F.

PROP. IV. PROBL. (PROP. 16. LIB. XIII. EUCL.)

Costituire un icosaedro.

Si esponga la linea retta AB dalla quale se ne tagli la quinta parte * : e descritto su di essa AB * il semicerchio ADB, si tiri in questo la CD perpendicolare alla AB, e si unisca DB. Ciò posto si esponga il cerchio EFGHK, il cui raggio VE sia uguale a DB, e descritto in esso il pentagono regolare EFGHK, si bisechino gli archi FG, GH, HK, KE, EF, in M, N, X, O, L, e si uniscano le EL, LF, FM, MG, GN, NH, HX, XK, KO, OE, e le altre LM, MN, NX, XO, OL; sarà LMNXO un altro pentagono regolare iscritto nel cerchio stesso, ed ELFMGNHXKO sarà il decagono. Dopo ciò dai punti E, F, G, H, K si elevino al piano del cerchio le perpendicolari EP, FR, GS, HT, KY, ciascuna delle quali sia uguale al raggio EV, e si uniscano le PR, RS, ST, TY, YP, PL, LR, RM, MS, SN, NT, TX, XY, YO, OP. fig 9 N. 9. VI.

E poichè le EP, KY sono ambedue perpendicolari al piano stesso, saranno parallele tra loro; ma sono di più uguali; perciò anche la PY è uguale e parallela alla EK, cioè al lato del pentagono regolare iscritto nel cerchio EFGHK. E dimostrando nel modo stesso, che ciascuna delle PR, RS, ST, TY sia quant' il lato del pentagono iscritto nel medesimo cerchio, ne segue che il rettilineo PRSTY sia identico a questo pentagono. È poi PE quanto il lato dell' esagono iscrittibile nel

2

cerchio stesso, EO è quello del decagono, e l' angolo PEO è retto; quindi PO sarà anche quanto il lato
* l. 5. del pentagono *. Similmente si dimostra, che lo sia OY; perciò POY è un triangolo equilatero: e nel modo stesso si rileverà, che sieno triangoli equilateri gli altri PLR, MRS, SNT, TXY. E poichè si è dimostrato, che sì PL, che PO sia quanto il lato del pentagono, cioè uguale ad LO; perciò il triangolo LPO sarà equilatero: e triangoli equilateri pur saranno LRM, MSN, NTX, XYO.

Or dal punto V, ch' è centro del cerchio EFGHK si elevi al piano di un tal cerchio la perpendicolare ΨVΩ, che si produca dall' una, e dall' altra parte in Ψ, Ω, e si tagli la VQ uguale al raggio del cerchio, e poi le VΨ, QΩ, ciascuna uguale al lato del decagono: finalmente si uniscano le PΩ PQ, YΩ, EV, LV, LΨ, ΨM. E poichè ciascuna delle VQ, PE è perpendicolare al piano del cerchio EFGHK, saranno esse parallele: ma sono anche uguali; quindi EV sarà uguale, e parallela a PQ; e perciò PQ al pari di EV è quant' il lato dell' esagono. Ma è poi QΩ quanto quello del decagono; dunque PΩ il cui quadrato pareggia quelli di PQ, e di QΩ sarà quant' il lato
* l. 5. del pentagono *. Similmente si dimostra, che YΩ sia quanto il lato del pentagono, cioè quanto PY; adunque il triangolo PΩY sarà equilatero. E collo stesso ragionamento si proverà, che sia equilatero ciascuno de' rimanenti triangoli, che hanno per basi le PR, RS, ST, TY, e per vertice il punto Ω. Di nuovo, poichè il quadrato di ΨL è uguale ai quadrati di VL, lato dell' esagono, e di VΨ, ch' è lato del decagono, sa-

rà LΨ quant' il lato del pentagono * : e dimostrando che anche MΨ sia quanto un tal lato, cioè uguale ad LM, sarà LΨM un triangolo equilatero. E nella stessa guisa si dimostrerà, che sieno triangoli equilateri quelli altri, che hanno per basi le MN, NX, XO, OL, e per vertice il punto Ψ. Si è dunque costituito un solido compreso da venti triangoli equilateri, che perciò è un icosaedro*. C. B. F. * l. 5. *d.29.XI.

PROP. V. PROBL. (PROP. 17. LIB. XIII. EUCL.)

Costituire un dodecaedro.

Si espongano due piani di un cubo perpendicolari tra loro, e sieno questi ABCD, EBCF; e poi si dividano per metà tutt' i loro lati in G, H, K, L, M, N, X, e si uniscano le GPK, HPL, MOH, NOX. Indi si dividano le NO, OX, HP in estrema, e media ragione ne' punti R, S, T, e sieno OR, OS, PT i segmenti maggiori; e da questi punti R, S, T si elevino ai piani BF, BD e dalla parte esterna del cubo le perpendicolari RY, SV, TQ uguali a ciascuna delle OR, OS, TP: finalmente si uniscano le BY, YV, VC, CQ, QB. Dico che il pentagono BYVCQ sia equilatero, equiangolo, ed in un solo piano; e che quindi sia uno di quei dodici, che terminano il dodecaedro da costituirsi. *fig.10.N.*

Si uniscano le RB, SB, VB. E poiche la linea retta NO è divisa in estrema, e media ragione in R, saranno i quadrati di ON e di NR tripli di quello di OR *; cioè i quadrati di BN e di NR, * l. 2.

o sia il quadrato di BR sarà triplo del quadrato di RO, cioè dell' altro di RY. Laonde sarà il quadrato di BY, ch' è uguale a quelli di BR, RY quadruplo del quadrato di RY; e quindi BY dupla di RY. Ma VY è pur dupla di YR; poiche RS è dupla di RO, o sia di RY; perciò BY è uguale ad VY. Similmente si dimostrerà che ciascuna delle BQ, QC, CV sia uguale a BY, o ad YV: quindi il pentagono BYVCQ è equilatero.

Dico ora, che esso sia in un piano. Si tiri dal punto O la OZ parallela ad RY, o ad SV, dalla parte esterna del cubo, e si uniscano le ZH, HQ; queste ZH, HQ dovranno stare per dritto. Imperocchè essendo la HP divisa in T in estrema, e media ragione, sarà HP a PT, come PT ad HT; ma HP è uguale ad HO, e PT è uguale a TQ, ossia ad OZ; dunque sarà HO ad OZ, come QT a TH; ed è HO parallela a TQ, perchè sono entrambe perpendicolari al piano BD; come pure TH è parallela ad OZ, perchè ciascuna è perpendicolare al piano BF. Adunque dovrà esser ZH in diretto con
* 32.VI. HQ *: e perciò il piano BQC in cui esiste la parte HQ della linea retta QHZ dovrà essere in diretto col piano BYVC in cui si trova l' altra parte HZ della stessa retta QHZ: vale a dire, che il pentagono BQCVY si troverà in un piano.

Bisogna adesso dimostrare, che sia equiangolo. E poichè la linea retta NO è divisa in R in estrema, e media ragione, e gli si è aggiunta per dritto la OS, ch' è uguale al suo maggior segmento OR; perciò anche la NS sarà divisa in O in estrema, e media ragione, ed ON sarà il segmento
* I. 2. maggiore *. Laonde i quadrati di NS e di SO

o sía di NS e di SV sono il triplo di quello di ON, o pure di NB *. Adunque aggiuntovi di comune il quadrato di NB, saranno i quadrati di SV, SN, NB uguali a quattro quadrati di NB. * l. 1.
Ma i quadrati di SN, NB sono uguali a quello di BS; perciò i quadrati di BS e di SV, cioè il quadrato di BV è quadruplo di quello di BN; e quindi BV doppia di BN, o sia uguale a BC. E poichè le due BY, YV sono uguali alle due BQ, QC, ciascuna a ciascuna, e la base VB è uguale alla base BC; sarà l' angolo BYV uguale all' angolo BQC. Similmente dimostreremo, che l' angolo YVC sia uguale all'angolo BQC: quindi i tre angoli BQC, BYV, YVC sono tra loro uguali; e perciò il pentagonò BQCVY è equiangolo *; ed era anche equilatero. * l. 4.
Dunque è un pentagono equilatero ed equiangolo.

Che se si espongono gli altri due piani del cubo perpendicolari ad AC, e contigui a CE, cioè DαβC, ed ΑλδB; e che poi si biseghino anche i loro lati, e si faccia la stessa costruzione, che si è fatta precedentemente, prendendo da una parte il piano DαβC in cambio del piano AC, e questo invece di BF; e dall' altra prendendo il piano ΑλδB invece di BD, e questo in luogo di CE; si dimostrerà similmente, che i pentagoni QCεDθ, QBγΑθ sieno equilateri, equiangoli, ed uguali al primo BQCVY, per aver con esso comuni i lati QB, QC, Qθ. Si sono dunque costituiti tre pentagoni tangenti i tre lati BC, DC, AB del cubo; e coerenti l' uno all' altro per mezzo dei lati BQ, QC, Qθ, che gli sono comuni. Se dunque col metodo stesso si costituiscano altri nove pentagoni tangenti rispettivamente gli altri nove lati del cubo,

*d.28.XI.si sarà costituito il dodecaedro *. C.B.F.

Scolio Generale.

Posta questa general costituzione delle cinque figure solide regolari, sarà facile adesso il descrivere uno di essi, che abbia un lato dato, o iscriverlo in una data sfera. E questa seconda condizione è stata sempre da Euclide aggiunta, come seconda parte a ciascuno de' summentovati Problemi; poichè essa in effetto si deriva quasi come immediata conseguenza dalla prima ricerca. Euclide da questa ha di più ricavato il rapporto, che serba il diametro della sfera al lato del poliedro regolare in essa iscritto; e quindi ha rapportati tra loro i lati di questi cinque poliedri iscritti in una stessa sfera (*Veg. la Prop.* 18. Lib. 13.). Ma noi siamo già andati molto innanzi in tale argomento, avendo in questa nota compreso quasi tutto il Lib. 13. degli Elementi, che se conveniva da una parte tralasciare, per la poca importanza dell'argomento, come in quasi tutte le istituzioni si trova praticato, non dovevasi altronde omettere di rapportarne in qualche modo i principali Probl. da noi esposti; sì perchè eran questi necessarj a stabilire la possibilità delle definizioni 25, 26, 27, 28, e 29 del lib. XI; sì anche perchè le costruzioni di essi non dovevano, per la loro eleganza, restar obbliate.

alle propp. XXII., e XXIII. del lib. XI.

Nella Prop. 22. Euclide dimostra, che: *Se vi sieno tre angoli piani due de' quali sono maggiori*

del terzo, comunque si prendano, ed essi abbiano lati uguali; si potrà costituire un triangolo dalle congiungenti gli estremi de' lati uguali: ed una tal Proposizione gli serve di Lemma alla costruzione della 23. Or avendo noi mutata la soluzione di questo Problema, abbiamo dovuto anche cambiare quel Lemma Euclideo in un'altro, ch' è quello, che trovasi ne' nostri Elementi.

Intanto siccome la soluzione Euclidea della Prop. 23, che ha il difetto di essere un po troppo lunga, non manca nè di rigore, nè di geometrica eleganza; si potrà, da chi amasse conoscerla, riscontrare nell' Euclide del Simson, ove si trova esposta con maggior brevità, e più semplicemente, che nel Testo Greco...

ALLE PROPP. A, E B DEL LIB. XI.

Nella Prop. 26 di questo Libro Euclide assume la prima volta, che due solidi terminati da piani simili, ed uguali sieno uguali, e simili. Adunque era necessario, che tal proposizione si dimostrasse prima della 26. E siccome i solidi di cui trattasi nella 26. sono parallelepipedi; e che in generale negli Elementi non si tratta d' identicità, che tra figure solide i cui angoli solidi sono compresi da tre soli angoli piani; perciò era sufficiente, che la dimostrazione poc' anzi detta si limitasse a questo caso, niente importando se essa si verifichi, o no per gli altri. Or per questa dimostrazione si esigeva, com' è chiaro, e come si è detto anche nella Nota alla def. 10, che si fosse prima dimostrato, che due angoli solidi contenuti da tre an-

goli piani rispettivamente uguali, e similmente posti sono uguali: che perciò noi abbiamo dovuto premettere alla 26, come due lemmi, le Propp. A, e B, dalle quali l' uguaglianza degli angoli solidi contenuti da tre angoli piani, e l' uguaglianza, e similitudine delle figure solide, che hanno le condizioni espresse nel principio di questa nota; resta geometricamente stabilita. Vale a dire, che per mezzo di questi lemmi restan rigorosamente dimostrate le Propp. 25, 26, e 28 del Lib. XI.; e quindi le altre, che su di esse sono fondate; cioè le Propp. 27, 31, 32, 33, 34, 36, 37, e 40 del Libro stesso; l' 8 del Lib. 12, ed il Cor. della 17 di questo Libro, come si ha ora in Euclide.

Il Simson per dimostrare la Prop. A vi ha premesso l'altro lemma, cioè che: *Se vi sieno due angoli solidi, ognun de' quali sia contenuto da tre angoli piani uguali tra loro, ciascuno a ciascuno; i piani ne' quali esistono gli angoli uguali saranno similmente inclinati*: la qual verità, come ben si vede trovasi al contrario compresa nell' uguaglianza degli angoli solidi proposti, quando questa si dimostrasse indipendentemente da quella. Or ritrovandosi in Euclide stesso, e nel medesimo Lib. 11. una dimostrazione, che pare ordita piuttosto a quest' oggetto, che all' altro cui è destinata, quella cioè della Prop. 35, noi l' abbiamo preferita alla dimostrazione del Simson; molto più perchè da tal dimostrazione se ne ricava per immediata conseguenza una verità della quale si ha bisogno nella 40. del Lib. 11, e che Euclide, e Simson erano obbligati a dimostrare precisamente con quel ragionamento, che a noi è servito per dimostrare l' uguaglianza degli

angoli solidi di cui trattasi nella Prop. A (*Veggasi la Nota alla Prop.* 35 *di questo Lib.*)

Che poi non si verifichi generalmente, che gli angoli solidi contenuti da angoli piani in numero maggiore di tre, i quali sieno rispettivamente uguali, e similmente posti, debbano coincidere; la qual cosa si è già accennata nella Nota alla def. 10 di questo Lib., si può dimostrare nel seguente modo.

PROP. TEOR.

Con quattro angoli piani, disponendoli collo stesso ordine, si può costituire una moltitudine di angoli solidi disuguali.

Sieno M, N, P, Q i quattro angoli piani proposti, e da essi si supponga già costituito l'angolo solido in A, in modo, che BAC sia uguale ad M, CAD ad N, DAE a P, EAB a Q. Si supponga in primo luogo, che i due angoli M ed N sieno maggiori dei rimanenti P e Q; che perciò questi due ultimi non potranno, insieme presi, pareggiar due retti *. Or poichè i due angoli M ed N, cioè BAC e CAD sono maggiori dell' angolo BAD *, e che M, cioè BAC, insieme con BAD è maggiore di CAD, o sia di N; ed al contrario N, cioè CAD insieme con BAD è maggiore di CAB o sia di M: perciò dev' essere M insieme con P e Q, maggiore di N; ed N, insieme cogli stessi angoli P e Q maggiore di M. Laonde dai tre angoli piani M, N, e P insieme con Q, i quali hanno le condizioni delle Propp. 20, e 21 Lib. XI. si potrà costituire un angolo solido. Sia questo l'an-

* 21. XI.

* 20. XI.

golo solido in *a* compreso dai tre angoli piani *bac* uguale ad M, *cad* uguale ad N, e *bad* uguale a P e Q. Ciò posto sieno similmente gli angoli M, Q maggiori dei rimanenti due N, P; che perciò nè meno questi potranno essere uguali a due retti. Si dimostrerà come poc' anzi, che dai tre angoli piani M, Q, ed N insieme con P si possa costituire un angolo solido. Si costituisca dunque quest' altro angolo
* 26.XI. solido nel punto *a* della *ab* *, e sia quello, ch' è contenuto dall' angolo *bac* uguale ad M, dall' angolo *bae* uguale a Q; e dall' altro *cae* uguale ad N e P. Or è evidente, che se il piano dell' angolo *cad* s' intenda rivolgersi un poco intorno alla *ca*, e verso la *ba*; minorandosi l' angolo *bad*, e divenendo *baf*; si potrà costituire al punto *a* della *ab* un angolo solido compreso dai tre angoli piani *baf*, *bae*, ch' è uguale a Q, ed *eaf*, ch' è lo stesso che *ead*, o sia P: quindi si sarà già costituito al punto *a* della *ab* un angolo solido contenuto dai quattro angoli piani *bac*, *caf*, *fae*, *eab*, che sono rispettivamente uguali ai proposti M, N, P, Q. E siccome l' artifizio poc' anzi adoperato potrà sempre aver luogo, fintantochè il lato *ad* non cada nel piano dell' angolo *eac*, nel qual caso svanisce di nuovo l' angolo solido in *a* compreso dai quattro angoli piani *bac*, *caf*, *fae*, *eab*, e ne risulta quello che si contiene dai tre *bac*, *bae*, *eac*; è chiaro perciò, che tra i limiti *bad*, *cae* si potranno costituire moltissimi angoli solidi compresi dai medesimi quattro angoli piani M, N, P, Q disposti coll' ordine stesso.

Che se gli angoli M ed N insieme presi risultino uguali agli altri P e Q presi insieme; ritro-

vandosi, o nò anche gli angoli N e P uguali agli angoli M e Q: è chiaro, che la dimostrazione procederà nel modo stesso, sol che gli angoli *bad*, *cae* suppongansi per poco minori; il primo di questi de' due P, Q, e l' altro degli altri due N, P; e di più compresi tra i limiti dinotati per lo primo dalla somma degli angoli P, Q, e dalla differenza degli altri M, N; e per l' altro dalla somma degli angoli N, P, e dalla differenza degli altri M, Q. E perciò è chiaro, che anche in questo caso si potranno costituire moltissimi angoli solidi dai quattro angoli piani proposti. C. B. D.

Or dalla dimostrazione rapportata si rileva chiaramente, che questa varietà di angoli solidi compresi da quattro angoli piani dipende dalla diversità dell' angolo *bad*, o pur da quella dell' angolo *cae*, ciascun de' quali vien costituito da due lati opposti dell' angolo solido in *a*: che perciò sarebbero uguali i due angoli solidi in A, ed *a*, ciascuno compreso da quattro angoli piani uguali, e similmente posti, se mai gli angoli BAD, *bad* fossero uguali, nel quale caso lo dovrebbero esser pure gli angoli CAE, *cae*; o al contrario. Vale a dire che saranno uguali gli angoli solidi di cui si parla, se essi dividonsi in due altri angoli solidi, ciascuno compreso da tre angoli piani uguali, e similmente disposti: ed in generale sarebbe facile il dimostrare, che sono uguali due angoli solidi, ciascuno compreso dallo stesso numero di angoli piani quanti si vogliano, se mai essi si dividono in angoli solidi contenuti da tre angoli piani similmente posti, ed uguali rispettivamente. Ha avuto dunque torto il Clavio di soggiugnere dopo la definizione dell' ango-

lo solido. *Ex his vero perspicuum cuivis erit, illos angulos solidos inter se esse aequales, qui continentur angulis planis et multitudine, et magnitudine aequalibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur.*

ALLA PROP. XXXI. DEL LIB. XI.

Nel Testo Greco questa Prop. ha due casi; il primo in cui supponesi, che i lati dei parallelepipedi, che insistono alle basi sieno a queste perpendicolari, e l'altro, ch'essi v'insistano obbliquamente. Noi intanto avendo dimostrato nel Cor. della Prop. prec., che ogni parallelepipedo a lati insistenti obbliquamente alla base, può rappresentarsi con un altro a lati insistenti perpendicolarmente alla base stessa, abbiamo perciò ridotta la presente dimostrazione al solo primo caso. Di più il Simson vorrebbe, che il primo di questi casi si distinguesse in due parti, in una delle quali si supponessero le basi equiangole, e nell' altro no; ed egli si duole, che ciò non si trovi praticato nel Testo Greco, e crede che qualche editore antico abbia intessuta la dimostrazione della prima di queste parti a quella della seconda. Or siccome una tal seconda parte è la più generale, ch' essa comprende la prima, e che volendo adattare a due parallelepipedi, che hanno le condizioni della prima parte l' apparecchio della seconda, si vede chiaramente, che il parallelepi-
fig. 30. pedo ICVN risultante dalla costruzione deve confondersi coll' altro CDFN, ch' è un de' proposti, sicchè la dimostrazione ne resta da se modificata:

perciò noi non abbiamo creduto di dover rapportare, che la sola seconda parte del caso primo.

ALLA PROP. XXXII. DEL LIB. XI.

L' editore del Testo Greco nell' apparecchio di *fig.* 31. questa dimostrazione omise di dire, che il parallelogrammo FH si debba applicare alla retta FG nell' angolo FGH uguale all' angolo LCG; il che è necessario: che perciò molto a proposito vi hanno supplito Clavio, e Simson.

Inoltre ricercandosi in tale apparecchio, che sulla base FH si costituisca un parallelepipedo della stess' altezza, che l' altro CD, ed avente con questo di comune il lato FD insistente al piano delle basi; l' editore Greco aveva erroneamente tralasciata quest' ultima circostanza, ch' è stata dal Simson, e da noi supplita. E la stessa correzione deve praticarsi nella Prop. 33.

ALLA PROP. C DEL LIB. XI.

É da credere, ch' Euclide avesse posta ne' suoi Elementi una tal proposizione, ch' è simile a quella, che aveva già data de' parallelogrammi equiangoli nella 23. del Lib. 6.

ALLA PROP. XXXV. DEL LIB. XI.

In questa Prop. si vuol dimostare, che » *Se vi sieno due angoli piani uguali, e ne' loro vertici si adattino due linee rette sublimi, le quali contengano angoli uguali co' lati degli angoli proposti,*

ciascuno a ciascuno; che poi in queste linee rette sublimi si prendano due punti, e da essi si abbassino le perpendicolari ai piani ne' quali sono i primi angoli, e dai punti dove queste perpendicolari incontrano tali piani si tirino le rette ai vertici di essi: queste congiungenti comprenderanno angoli uguali colle r tte sublimi. Da una tal dimostrazione poi se ne deduce per Corollario: *che se mai le linee rette sublimi erano uguali; le perpendicolari dovevano essere anche uguali*.

Or chi mai potrà sostenere, che tutto questo artifizio sia di Euclide; e che questo Geometra, che altronde riconosciamo dotato di una grandissima sagacia, e penetrazione geometrica, si fosse così ingannato in questo luogo? Imperocchè o egli suppose, che gli angoli solidi contenuti da tre angoli piani uguali, e similmente posti sono uguali, o non lo suppose. Se lo suppose; perchè poi usar tanto artifizio per dimostrare una verità, che ne risultava intuitivamente? Ed ecco in qual modo.

fig. 26. Sieno BAC, *bac* gli angoli proposti, ed AD, *ad* le linee rette sublimi, che formano l' angolo BAD uguale all' angolo *bad*, e l' angolo DAC uguale all' angolo *dac*: dovranno essere uguali gli
* A. XI. angoli solidi in A, *a* *; e perciò posti l' uno nell' altro dovrà l' angolo BAC combaciare coll' altro *bac*, e la AD adattarsi sulla *ad*. Adunque si prendano nelle AD, *ad* i punti D, *d*, e da essi si abbassino su i piani BAC, *bac* le perpendicolari DE, *de*: è chiaro, che queste, quando gli angoli solidi si suppongono coincidere, sono parallele, ed esistono colle AE, *ae* in un medesimo piano; che

perciò le comuni sezioni di questi piani cogli altri di BAC, *bac* dovranno coincidere; e quindi essere uguali gli angoli DAE, *dae*.

Che se poi Euclide non volle assumere; ma dimostrare, che gli angoli solidi contenuti da tre angoli piani uguali, ciascuno a ciascuno, e similmente posti, sieno uguali, dovè certamente farlo prima della 25: ed in un tal caso la dimostrazione della presente Proposizione avrebbe potuto anche congegnarsi nel modo poc' anzi detto. Adunque nell'uno, e nell' altro caso la dimostrazione della 35. del Libro 11. non è corrispondente all' oggetto che vuol dimostrarsi: che perciò è da credere, ch' essa sia stata ordita da Euclide per dimostrare precisamente l' uguaglianza di due angoli solidi, i quali avessero le condizioni poc' anzi dette; e che quelli editori antichi, che credettero di poter assumere senza dimostrazione questa verità, si sieno di un tal ragionamento avvaluti per dimostrare la 35. Che anzi per convincersi che questa Proposizione 35. non sia di Euclide, oltre a ciò che si è detto, basta riflettere, che la verità che in essa vuol dimostrarsi non è di nessun uso negli Elementi; e che al contrario vi bisogna per la dimostrazione della Proposizione 40. il Corollario, che se ne deduce. Perchè dunque Euclide avrebbe usata in questo luogo una bizzarria geometrica, della quale non ve n' ha altro esempio negli Elementi, e che non è certamente senza taccia? E poi un tal Corollario si poteva anche dimostrare indipendentemente dalla Prop. da cui si fa dipendere, come può vedersi presso del Simson: che perciò non

sappiamo persuaderci, perchè mai questo Geometra abbia ritenuta nel suo Euclide la Prop. 35., che poteva comodamente supprimere, come noi abbiamo fatto; deducendo quel Cor. dalla sua Prop. B, ove aveva dimostrato, che due angoli solidi contenuti da tre angoli piani rispettivamente uguali, e similmente posti possonsi far coincidere; del qual principio egli in effetto si serve per dimostrare un tal Corollario indipendentemente dalla 35.

ALLA PROP. XXXVI. DEL LIB. XI.

Questa proposizione conferma ciò, che abbiamo detto nella nota precedente: imperocchè si vede chiaro, ch' essa può dimostrarsi senza aver bisogno di quella; e così ha fatto il Tacquet, supponendo che gli angoli solidi contenuti da tre angoli piani rispettivamente uguali fossero uguali; la qual cosa nel Libro 11. già altre volte si era assunta, Ciascun vede però, che tal dimostrazione del Tacquet, sia, per ciò che più volte si è detto, erronea; giacchè questa proprietà degli angoli solidi doveva dimostrarsi, e non assumersi. Inoltre in una tal dimostrazione il Tacquet suppone, che i solidi sieno già fatti, e non dimostra in qual modo si debbano costruire, come si trova eseguito nel Testo Greco. Il Simson poi avendo dimostrato il Corollario della Prop. 35. indipendentemente da una tal Prop., come si è detto nella nota precedente, ha perciò dimostrata la 36, senza aver bisogno della 35.

ALLA PROP. XXXVII. DEL LIB. XI.

In questa Proposizione si trova assunto, che le ragioni triplicate di due ragioni uguali sieno pure tra loro uguali. Ma se Euclide non volle assumere nella Prop. 22. del Lib. 6., che le ragioni duplicate di ragioni uguali sono uguali; il che per altro si può dedurre facilmente dalla Prop. 22. del Lib. 5.; come mai potè poi suppor ciò vero senza dimostrazione per le triplicate? È per questa ragione, che noi, seguendo Clavio, e Simson, abbiamo dimostrata la presente proposizione in una maniera diversa dal Testo Greco; ed analoga all' altra, che Euclide tenne per la Prop. 26. del Lib. 6.

ALLA PROP. XXXVIII. DEL LIB. XI.

Questa Prop., sebbene non abbia alcun uso negli Elementi; pure trovandosi adoperata da Apollonio, e da altri Geometri, l' abbiamo ritenuta; nè pensiamo come il Simson ch' essa sia affatto inutile.

ALLA PROP. XXXIX. DEL LIB. XI.

Questa Prop. par che sia stata stabilita da Euclide negli Elementi come Lemma alla Prop. 17. del Lib. 13. mentre di essa non se ne trova giammai fatto alcun uso. Or noi non avendone bisogno per un tal Libro, abbiamo perciò creduto conveniente di tralasciarla.

LIBRO XII.

AL LEMMA I. DEL LIB. XII.

Questa verità di cui si ha bisogno nella dimostrazione della Prop. 5. del presente Libro, è la Prop. 1. del Lib. 10. di Euclide.

AL LEMMA II. DEL LIB. XII.

Euclide aveva preposto il Problema di cui si tratta in questo Lemma alla Propos. 17. del presente Libro, nella quale ne aveva bisogno. E questa 17, e la 16 di cui si parla dovevano poi formare gl' incidenti per la dimostrazione della Propos. 18, nella quale egli per dimostrare, che *le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri*, si serve di un elegante, e comodo ripiego geometrico. Or avendo noi in questi Elementi adottata una tal maniera di dimostrare in diverse Proposizioni, tra le quali la seconda del Lib. XII., abbiamo dovuto trasportare la 16. nel principio di un tal Libro. Abbiamo poi aggiunto a questo Lemma un Corollario, del quale avevamo bisogno nelle Propp. 27, e 28 de' Teoremi di Archimede.

ALLA PROP. II. DEL LIB. XII.

Gli antichi Geometri tutte le volte, che vollero paragonare le figure curvilinee tra di loro, le considerarono come il limite di figure rettili-

nee; e dal rapporto di questo vennero in cognizione del rapporto di quelle. Euclide, per esempio, avendo dimostrato indipendentemente dal numero dei lati, che due poligoni simili iscritti in due cerchi erano tra loro in duplicata ragione de' diametri, si spinse a dimostrar lo stesso per gli cerchi, che considerò come i limiti de' poligoni in essi continuamente isoritti: ma l'idea di considerare il cerchio come un poligono d' infiniti lati era poco geometrica, perchè ripugnante alla definizione di una tal curva; e perciò egli, dopo essersene servito per la scoperta di tal verità, si ricusò giustamente di adottarla per la dimostrazione di essa. Archimede pervenne nel modo stesso a determinare le superficie del cilindro, del cono, e della sfera, ed i rapporti delle loro solidità, la quadratura della parabola, e le proprietà delle spirali; nè poi volle adottar l'idea di limite in dimostrare queste sue importanti scoperte. Ed ecco un altro fortissimo argomento, col quale resta convalidata la necessità delle dimostrazioni indirette. I Geometri antichi, che amavano certamente assai più che noi la purità, ed il rigor geometrico, vi sono spesse volte ricorsi, quando hanno dovuto nascondere le nozioni dell' infinito, per mezzo delle quali erano pervenuti alla scoperta di qualche verità. E chi ardirà mai sostenere, che sia forse meglio il fondar la conoscenza di una verità importante su di una teoria metafisica, e paradossa, piuttosto che ricorrere ad un ragionamento indiretto convincentissimo? È vero, che l' uso de' metodi moderni ci ha resi più arditi a maneggiar le teorie dell' infinito; ma non

*

bisogna però negare gli sforzi, che i più sommi analisti hanno fatti per evitarle, ben persuasi della loro durezza. Qual necessità vi sarà dunque d' introdurre queste nozioni negli Elementi di Geometria, quando si può fare altrimenti, e bene?

Intanto faremo qui avvertire, che questa Proposizione 2. del Lib. 12. si trova da noi dimostrata in una maniera indiretta diversa dall' Euclidea, e con un ripiego, del quale questo stesso Geometra si avvale nella dimostrazione della Prop. 18. di un tal Libro; sicchè i troppo Euclidei ne pare avranno che ridirci. E con questo stesso ripiego semplicissimo si troveranno da noi anche dimostrate le Propp. 11, 12, 18 del Lib. 12; e le Propp. 3, 9, 11, 14, 24, 25, 27, 28 del nostro Libro sulla sfera, e sul cilindro; il che ha data a queste dimostrazioni tale uniformità, che il giovine, avendone imparata una, è nel caso di conoscerle tutte, senza stento alcuno: e di più per gli Teoremi di Archimede ci ha risparmiati molti lemmi, che il Geometra Siracusano vi premette, per dimostrarli alla sua maniera; ed ha presentate ai giovani delle dimostrazioni assai più brevi, e meno complicate, che le Archimedee.

ALLE PROPP. III., E IV. DEL LIB. XII.

fig. 43. Nella Prop. 3. dopo di essersi dimostrato il triangolo EHG uguale, e simile al triangolo KDL, si soggiugne: *Eadem ratione et EHG triangulum est aequale et simile triangulo HKA*; mentre si poteva conchiudere, che questi due triangoli sieno uguali e simili per l' 8. del Lib. 1. Di più

una volta, che si è conchiuso, che il triangolo EAG sia uguale e simile all' altro KHL, è assolutamente superfluo il dimostrare, che l' angolo BAG pareggi l' angolo KHL; il che trovasi eseguito nel Testo Greco, quando si vuol provare, che i triangoli BAC, KHL sono simili. Nella Prop. 4. si è poi reso qualche passaggio più esplicitamente, che nel Testo di Euclide.

ALLA PROP. VI. DEL LIB. XII.

Il modo, come da noi si è dimostrata questa Proposizione, ch' è analogo a quello del Simson, ha resa una tal dimostrazione un poco più breve dell' Euclidea.

AL COR. DELLA PROP. VIII. DEL LIB. XII.

A questa Prop. vi si trova nel Testo aggiunto un Corollario, la cui dimostrazione era imperfetta; poichè si tralasciava di dimostrare, che le piramidi triangolari in cui si dividono due piramidi poligone simili, sieno anche simili; il che necessariamente doveva dimostrarsi: e lo stesso Euclide così ha praticato in un caso simile nella 12 del presente Libro. Noi abbiamo perciò supplita una tal mancanza, e per non presentare in questi Elementi un Corollario corredato di una dimostrazione alquanto lunga, abbiamo esibita la stesta verità come Scolio.

ALLA PROP. XIII. DEL LIB. XII.

In questa Prop. si trovava assunto, e non già dimostrato, che la comune sezione di un cilindro con un piano parallelo alle sue basi, sia un cerchio; e noi abbiamo ciò supplito.

ALLA PROP. XV. DEL LIB. XII.

Il primo caso della seconda parte di questa dimostrazione non si trova nel Testo Greco, ed inoltre vi sono alcune cose mancanti anche nel secondo caso di una tal parte. E sì a quello, che a questo ci si è supplito in questi nostri *Elementi*.

ALLA PROP. XVII. DEL LIB. XII.

In questa Prop. si tratta di *descrivere nell'esteriore di due sfere concentriche un solido poliedro, il qual non tocchi la sfera interiore*; e nella dimostrazione di essa vi erano, nel Testo di Euclide, molte cose depravate, e mutilate, che il Simson ha corrette. Or poichè una tal Proposizione non è che un lemma della 18., noi abbiamo trovato opportuno di sostituirvi l'altra, che trovasi ne' nostri Elementi; e ciò per due motivi: il primo, per evitare una lunga, e complicata soluzione, e dimostrazione, qual'è quella, che dà Euclide di un tal Problema; e l'altro, perchè il Lemma da noi stabilito espone a dirittura il rapporto di due solidi iscritti in due sfere, e generati in quel modo, che da noi si è
* 17.XI. supposto *; mentre che un tal rapporto, sul quale

è fondata la dimostrazione della Prop. 18., non forma presso di Euclide, che un Cor. della sua 17ª.

AVVERTIMENTO.

L'esserci in questi Libri XI., e XII. molto allontanati da una semplice versione, ci ha impedito di far notare minutamente i guasti prodotti nel Testo Greco dagli antichi espositori, de' quali si potrà esserne pienamente informato dalle Note del Simson. Noi intanto conchiuderemo queste nostre Note a' primi sei Libri, ed all' XIº e XIIº di Euclide, dicendo col Simpson, che dalle cose fin qui esposte apparisce abbastanza quanto sieno stati corrotti, e mutilati dagl' ignoranti editori gli Elementi dell' accuratissimo Geometra Euclide; e quindi, che l' opinione ch' ebbero molti sommi uomini dell' edizione Greca, che ora abbiamo, cioè ch' essa poco, o niente si differisca dalla vera opera di Euclide, gl' ingannò senza dubbio, e gli rese perciò meno accurati in esaminare una tale edizione; donde è avvenuto, che da' tempi di Teone fin ora, non abbiano avvertiti in essa alcuni errori di non poco momento. Che perciò ci giova sperare, che l' impegno, che ci abbiamo preso in restituire, e liberare da nei questi Libri, non debba dispiacere ai giusti estimatori delle cose, i quali sapranno ben discernere le legittime definizioni, e dimostrazioni da quelle, che non lo sono. E coloro i quali hanno tentanto di mutare l' ordine, ed il metodo Euclideo potranno anche convincersi, che sia tale il merito degli Elementi di Geometria composti da questo Geometra, che quantunque si oltremo-

llo con tutto ciò hanno formata l'ammirazione di tutti i Geometri sommi d' ogni tempo; e per la loro eccellenza sono stati insegnati in tutte le Scuole, tradotti, e comentati in tutte le lingue. E quindi si vede, che con molta ragione a' facitori delle ordinarie Istituzioni Geometriche, che non cessano a folla di comparire a dì nostri, per avèr poi un' efimera durata, si può rinfacciare ciò che dice il celebre Giuseppe Torelli nella Prefazione al suo Archimede: *Non sum nescius, quæ antiqui pertractarunt, eadem à recentioribus pertractata esse, et quotidie pertractari; sed, absit dicto invidia, labore prorsus irrito. Si enim Euclides, ut de hoc uno loquar, aliqua in parte peccat, cur non redarguis? Sin autem in omnibus sibi constat, cur eadem mihi aliis verbis proponis? At quædam, scilicet recentiores detorquent, invertunt, immutant. Ita quidem existimo: sed tamen dum hoc faciunt, quid, quæso, aliud agunt, quam ut sarcinatores imitentur, qui foeminarum vestes quotannis refingunt, ut eas ad sæculi mores accomodent? De brevitate autem, quam tantopere jactant, quod dicunt, id nihil est; cum breve nihil dici debeat, quod sine explicatione aliqua intelligi nequit, et minus perspicue traditur. Quæ cum ita sint, optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis illustrandisque operam posuerunt.*

NOTE

AL LIBRO SULLA SFERA, E SUL CILINDRO

ALLE DEFF.

Archimede non aveva definito il segmento sferico, nè tampoco aveva ciò fatto Euclide; e noi abbiamo supplita una tal definizione. E poi sì questa che le altre del settore, e del rombo conico le abbiamo fatte per genesi, a fin di mettere una certa uniformità tra esse, e quelle del cono del cilindro, e della sfera, date da Euclide nel Libro XI.; ed anche perchè così facendo ci si è facilitata la loro applicazione a quelle proposizioni in cui se ne fà uso. Intanto sì alla definizione del settore, che a quella del rombo conico vi abbiamo aggiunta una seconda parte, che contiene la definizione di Archimede.

AI PRINCIPJ.

Archimede ha stabilite nel principio di questo suo Libro alcune Proposizioni, che la maggior parte degli espositori hà prese per assiomi; ma che a rigor geometrico non sono tutte tali: noi ritenendole con qualche modificazione, per renderle più chiare, e di una più facile applicazione, le abbiamo dato il nome, che loro era conveniente, di *Principj*.

ALLA PROP. III.

Questa Prop. 3. non si appartiene, presso Archimede, al Libro presente; ma all' altro della *Misura del cerchio*. Essa però era necessaria in questo luogo, per la nostra maniera di esporre le verità, che in un tal Lib. si contengono: e nello Scol. vi abbiamo recato il rapporto delle circonferenze di due cerchi, che conveniva esporre esplicitamente negli Elementi di Geometria.

ALLA PROP. V.

fig. 60. In questa Prop. Archimede divide l' arco ABC per metà in B; ed unite le corde AB, BC, DB, dice che i due triangoli ABD, BCD sieno maggiori del triangolo ADC: e ad un uomo che inventava, ciò poteva permettersi. Eutocio nel suo dotto Comentario ai Libri sulla sfera, e sul cilindro volle dimostrar questo passaggio; e della sua dimostrazione tutti i Geometri ne sono restati paghi, eccetto il celebre Giuseppe Torelli, il quale nel suo bellissimo Archimede, a piede di pagina dice: *hæc demonstratio Eutocii non valet*. Ed in effetto essa non è sufficiente a provare l' assunto, che nel solo caso, che formandosi al punto D della AD, e nel piano dell'angolo ADC, un altro angolo uguale ad ADB, o a BDC, e preso nell' altro lato di quest' angolo una parte uguale alla AD, l' estremo di un tal lato cada al di sotto della AC: poichè se ciò non avviene, e che questo estremo cada al contrario al di sopra del-

la AC, come si verifica sempre che l'angolo ADB è maggiore di ADC'; la dimostrazione di Eutocio non è soddisfacente. (*Si riscontri una tal dimostrazione ne' Comentarj ad Archimede*). Noi abbiamo perciò supplita diversamente questa dimostrazione, come potrà vedersi nella Nota, che trovasi inserita nella Prop. 5.

ALLA PROP. XIV.

Archimede riduce tutte le superficie curve de' solidi, che considera in questo suo Libro I., al cerchio; e tutte le loro solidità al cono. Or avendo egli in seguito dimostrato a qual triangolo sia uguale un cerchio (*Circuli Dimensio* Prop. 1.), ha in tal modo ridotte tutte quelle esibizioni di superficie curve ad una figura rettilinea; il che era importante, non solo per la pratica, in cui spesso si ha disogno di valutarle; ma anche in molte ricerche geometriche. Era dunque necessario, che egli stabilisse anche un rapporto tra un cono, ed una piramide, affinchè que' solidi da lui ridotti al cono, potessero similmente esser valutati in pratica. La qual cosa non trovandosi da questo sommo Geometra antico eseguita, nè altri avendola ancora esposta con quel rigore, che convenivasi; noi abbiamo creduto opportuno di occuparcene in questa Propos. 14., che abbiamo dimostrata per mezzo di quello stesso principio ricavato dall' ultima Propos. del Lib. XII. di Euclide.

ALLE PROPP. XV., XVI., XVII., E XVIII.

Le dimostrazioni di queste Propp sono identiche a quelle di Archimede. Noi abbiamo però aggiunto alla 16., ed alla 17. un Corollario, del quale avevamo bisogno in alcune dimostrazioni seguenti.

ALLE PROPP. XX., XXI., XXII., E XXIII.

Queste Proposizioni sono tanti lemmi per l'esibizione della superficie della sfera, e di quella del segmento sferico.

ALLA PROP. XXIX.

L'esibizione di un segmento sferico viene da Archimede recata nel Libro secondo della sfera, e del cilindro, insieme ad alcune altre ricerche, come quella di: 1. *Rinvenire una sfera uguale ad un cono, o ad un cilindro dato*: 2. *Dividere una sfera con un piano in modo, che le due parti della sua superficie sieno in data ragione*: 3. *O pur sieno in data ragione i due segmenti sferici ne' quali un piano divide la sfera*. 4. *Costituire una porzione sferica simile ad una porzione sferica data, ed uguale ad un' altra data*: 5. *Date due porzioni sferiche, che sieno di una stessa sfera, o pur di sfere diverse; costituirne una terza simile ad una, e che abbia la sua superficie uguale all' altra*: 6. *Troncare da una sfera una porzione sferica, che serbi ragione data al cono, che ha la stessa base, e la stess' altezza della porzione*. Egli poi vi dimostra che: 7. *Se una sfera si seghi con un piano,*

che non passa per lo centro; la porzione maggiore serba alla minore, minor ragione della duplicata della superficie di quella alla superficie di questa: 8. *Che la mezza sfera è la massima di tutte le porzioni sferiche contenute da superficie uguali.*

Or siccome niuna di queste verità era necessaria a recarsi negli Elementi, per cui un tal Libro destinato *ad abbundantiorem scientiam* poteva benissimo tralasciarsi; e perciò che noi abbiamo trasportata l'esibizione del segmento sferico a far parte del 1. Libro.

AL LIBRO DELLA MISURA DEL CERCHIO.

I principj su i quali abbiamo fondata la presente ricerca sono presi da Giacomo Gregory; ma non perciò gli si deve attribuire la maniera come noi gli abbiamo applicati a dimostrare le diverse verità comprese nel Libro *de Dimensione Circuli* di Archimede: che anzi la stessa esposizione di tali principj ne' due Lemmi, è molto più semplice di quella datane dal loro inventore. Intanto siccome a ridurre in pratica le verità in questo libro comprese è necessario esibire aritmeticamente un quadrato; e che per gli usi pratici ai quali frequentemente servono i Teoremi della sfera, e del cilindro, spesso occorre di valutare la superficie, e la solidità di que' corpi; non sarà perciò fuor di proposito, che io qui rechi in due Teoremi la maniera di valutare uno spazio rettangolare, e la solidità di un parallelepipedo rettangolo, alle quali due figure, le altre tutte, come si sa dagli Elementi, facilmente si riducono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se i due lati che contengono un rettangolo, sieno espressi con qualsivogliano numeri rapportati ad una stessa unità; il prodotto di questi dovrà dinotare in quadrati dell' unità stessa il rettangolo proposto.

Sieno A, B i lati di un rettangolo espressi in numeri, come si è detto: sarà un tal rettangolo a quello di B nell' unità comune ad A, e B, come
* 1. VI. A ad 1 *; e perciò quel rettangolo conterrà que-
c. 15. V. sto tante volte, quante volte A contiene 1 *, cioè quel numero di volte, ch' è dinotato da A. Similmente il rettangolo di B nell' unità sta al quadrato di questa, come B ad 1; e perciò quel rettangolo conterrà questo quadrato il numero di volte, ch' è rappresentato da B. Laonde il rettangolo di A in B dovrà contenere il quadrato dell' unità tante volte, quante n' esprime il prodotto delle unità di A per quelle di B.

SCOLIO.

Perchè tutte le figure rettilinee possonsi ridurre a rettangoli; dalla misura di questo, se ne potranno facilmente rilevare le regole per la misura di quelle. Il che sarebbe superfluo di qui esporre a disteso.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se i tre lati intorno ad un angolo di un parallelepipedo rettangolo sieno espressi in numeri rapportati ad una stessa unità; il prodotto di questi dinoterà il numero de' cubi di quell' unità, che si contengono in un tal parallelepipedo.

Sieno A, B, C i tre lati di un parallelepipedo rettangolo espressi in numeri, come si è detto. Ed essendosi dimostrato *, che il prodotto de' due numeri, che rappresentano A, e B esprima in quadrati dell' unità assunta quel rettangolo terminatore del parallelepipedo, il quale è contenuto da A, e B: è chiaro, che se un tal piano si prenda per base del parallelepipedo, e che perciò sia C l' altezza di questo solido; dovrà esso stare a quell' altro parallelepipedo della base stessa, e che ha per altezza l' unità, come C ad 1 *; cioè quel parallelepipedo conterrà questo il numero di volte espresso da C. Similmente si dimostra che questo parallelepipedo contiene il cubo dell' unità tante volte, quante volte il rettangolo di A in B contiene il quadrato dell' unità, cioè quel numero di volte, che viene espresso dal prodotto de' numeri, che rappresentano A, e B *. Adunque il parallelepipedo proposto dovrà contenere il cubo dell' unità quel numero di volte, che si otterrà prendendo il prodotto di A, per B, e per C. C. B. D.

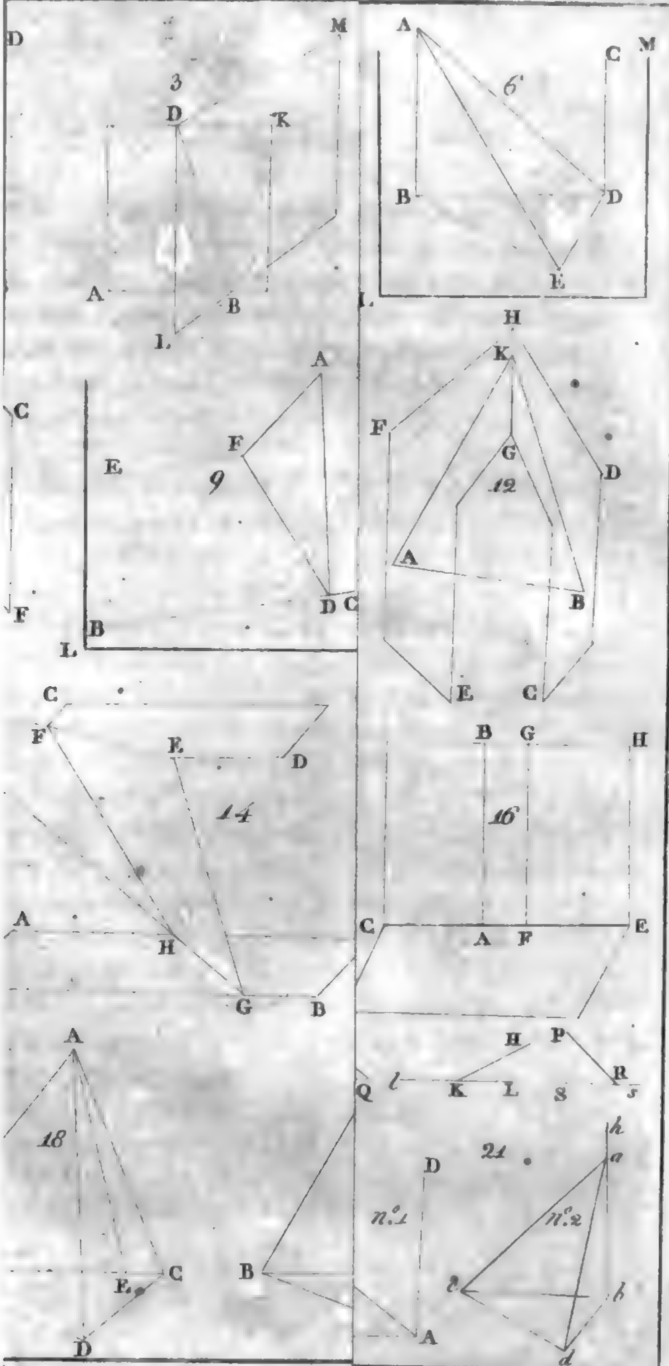
*p.prec.

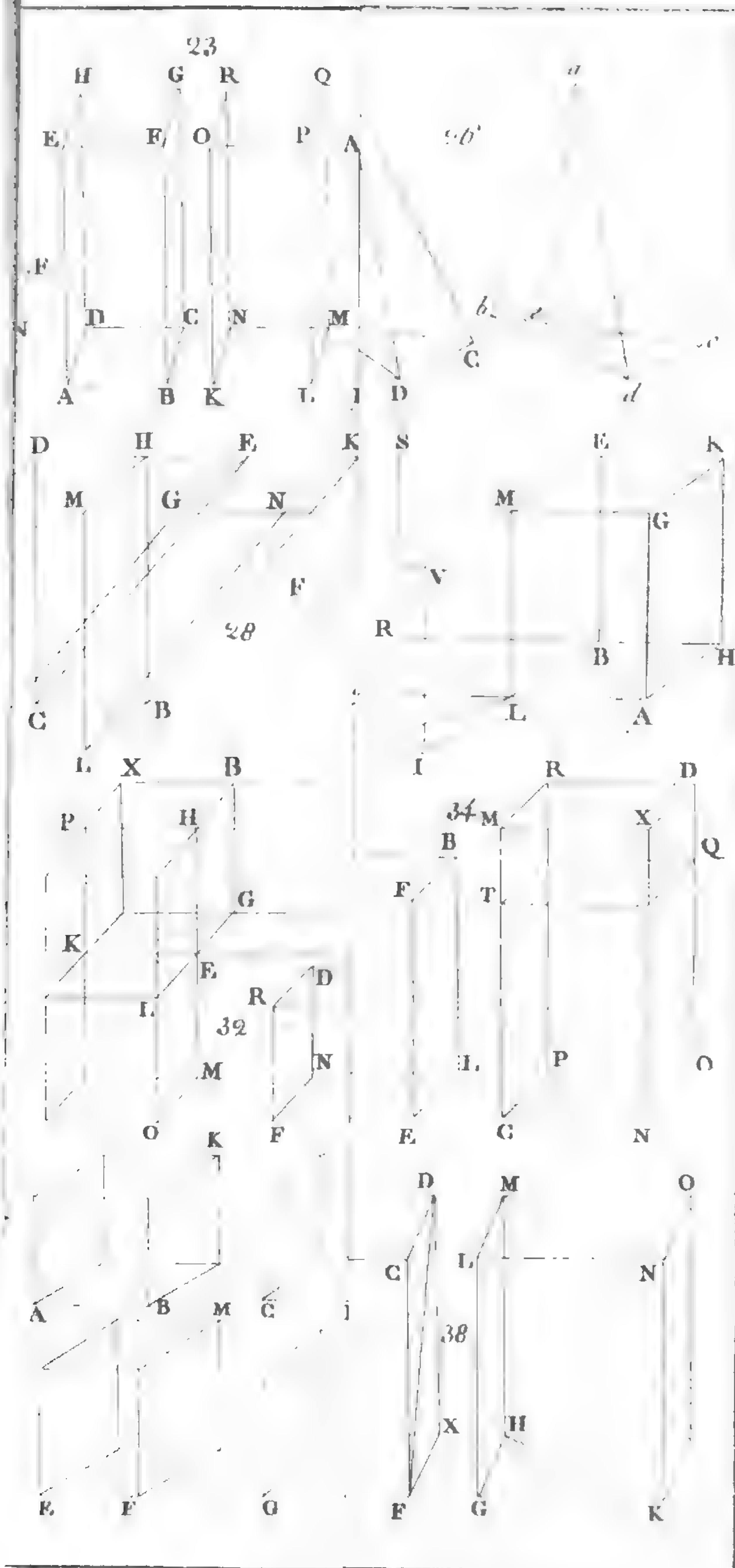
* 32.XI.

*p.prec.

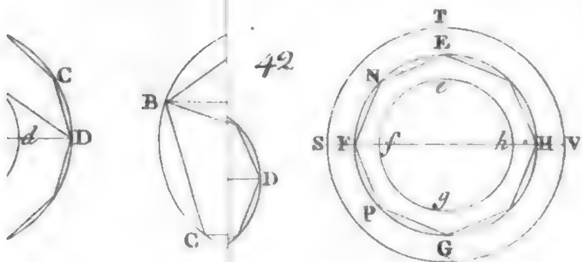
SCOLIO.

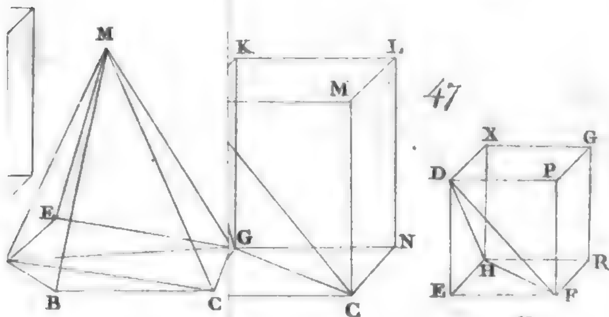
Potendosi tutte le figure solide considerate negli Elementi ridurre al parallelepipedo; si potrà per mezzo del precedente Teorema valutare ciascuna di quelle figure solide: che perciò noi abbiamo creduto inutile d'intrattenerci su questo assunto.

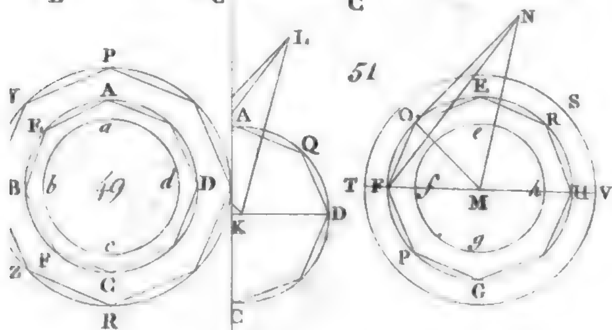

3
6
9
12
14
16
18
21
n.° 1
n.° 2

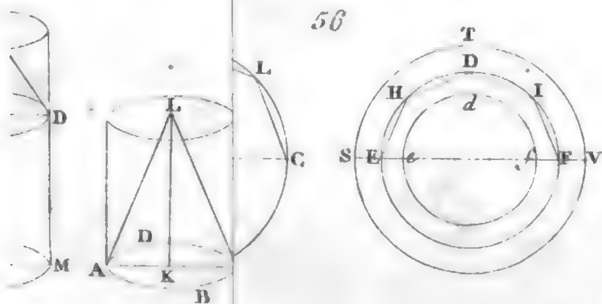


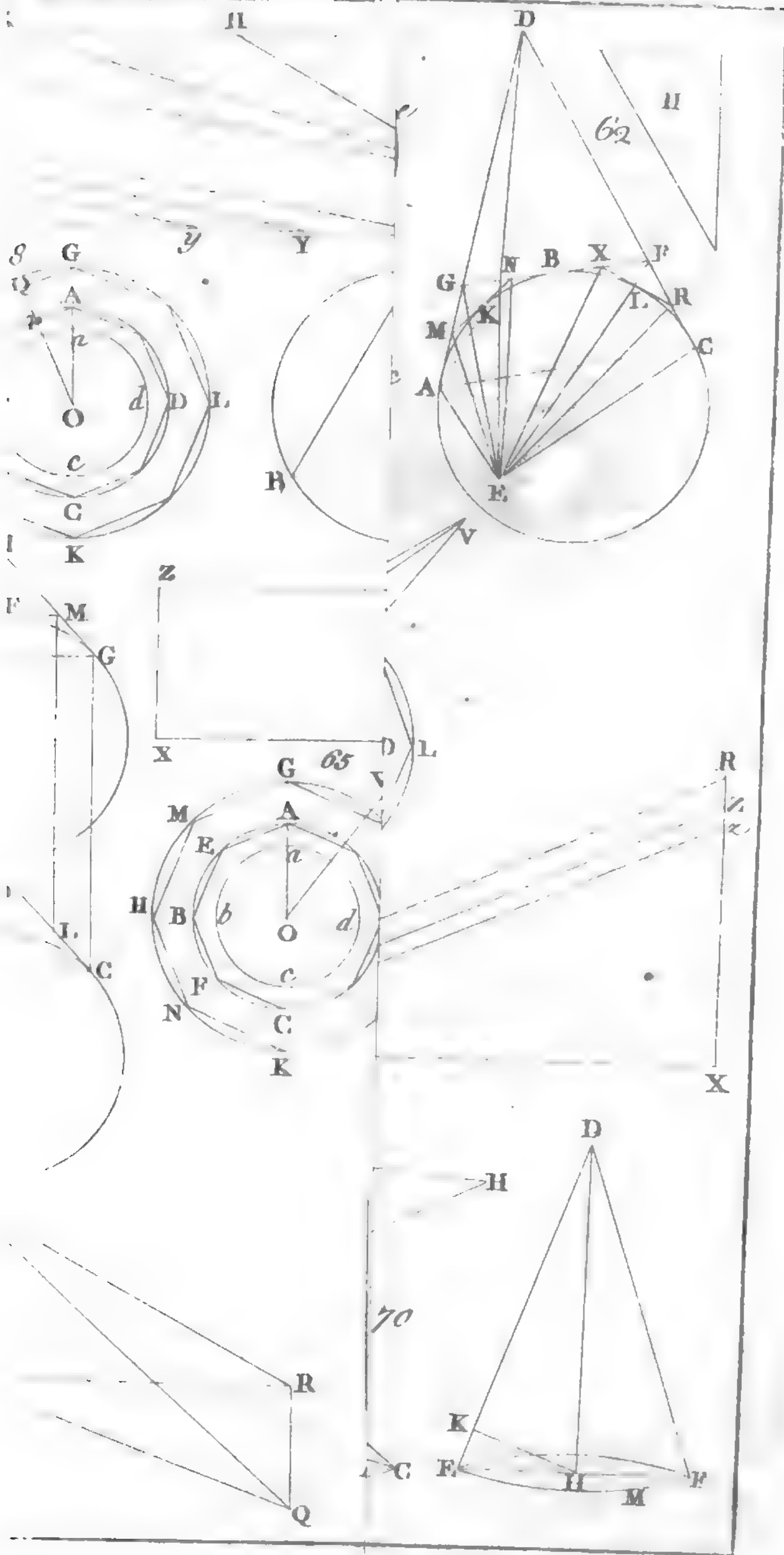



C
D
d
B
D
C
42
T
E
N
e
S
F
f
h
H
V
g
P
G

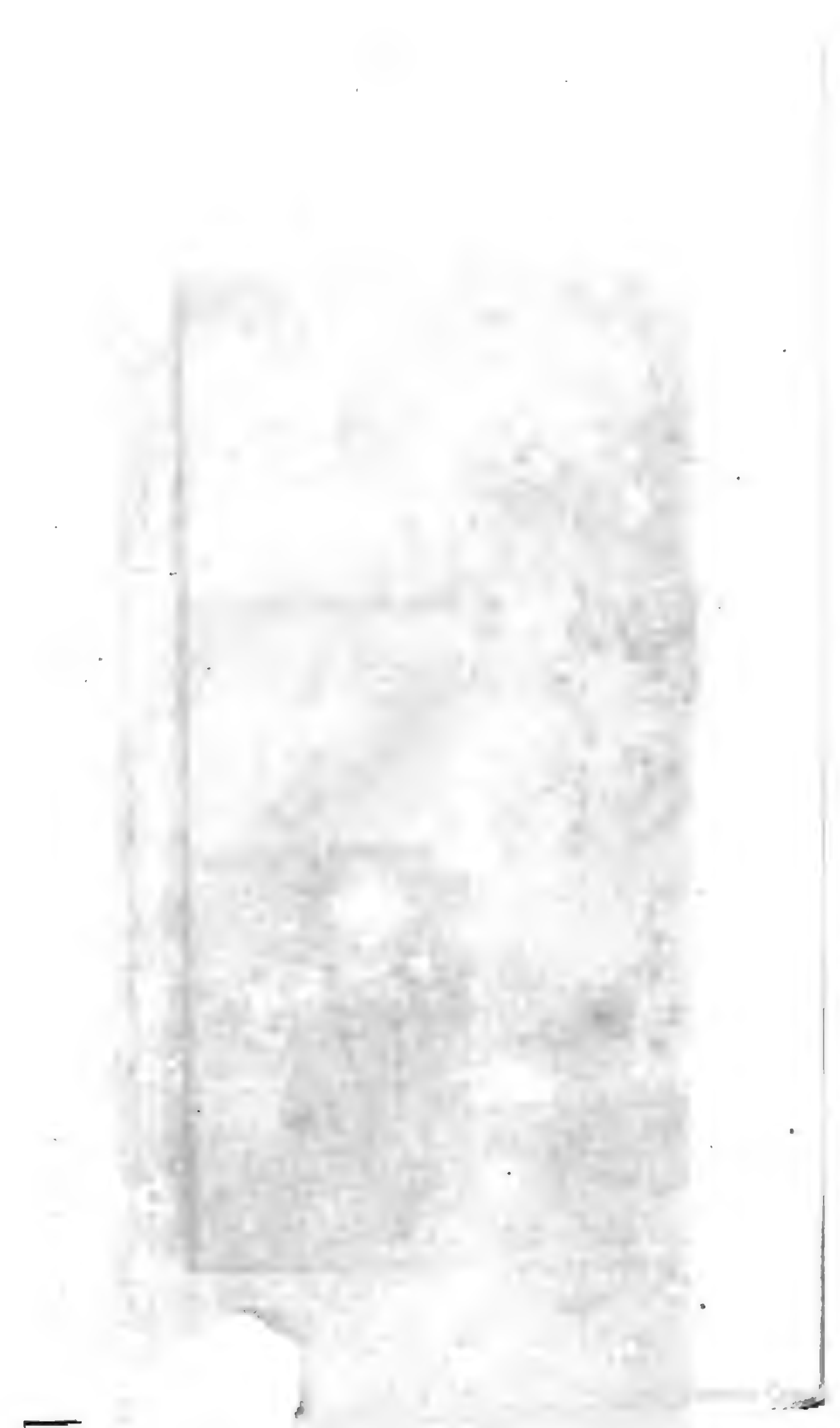

M
E
G
B
C
K
L
M
N
C
47
X
G
D
P
H
R
E
F

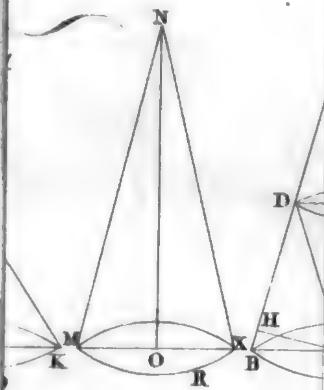

P
A
a
B
b
49
d
D
c
F
C
R
Z
L
A
Q
K
D
C
51
N
E
S
O
R
e
T
F
f
M
h
H
V
g
P
G

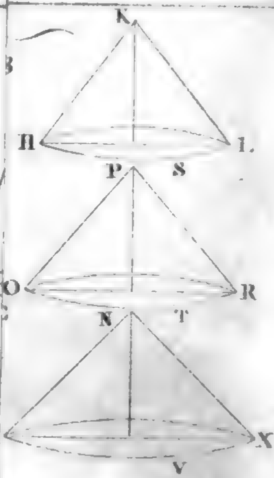

D
M
L
D
A
K
B
L
C
56
T
D
H
I
d
S
E
e
F
V

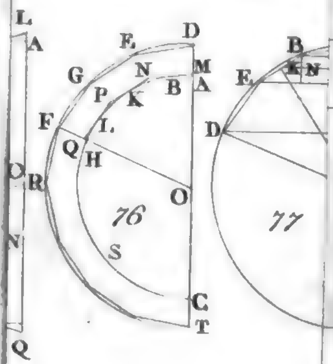


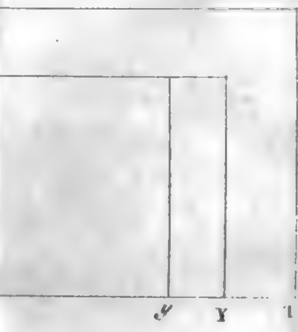
62
65
70

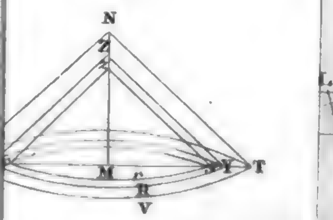


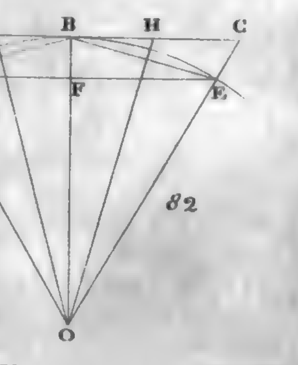

N
M
K
O
R
X

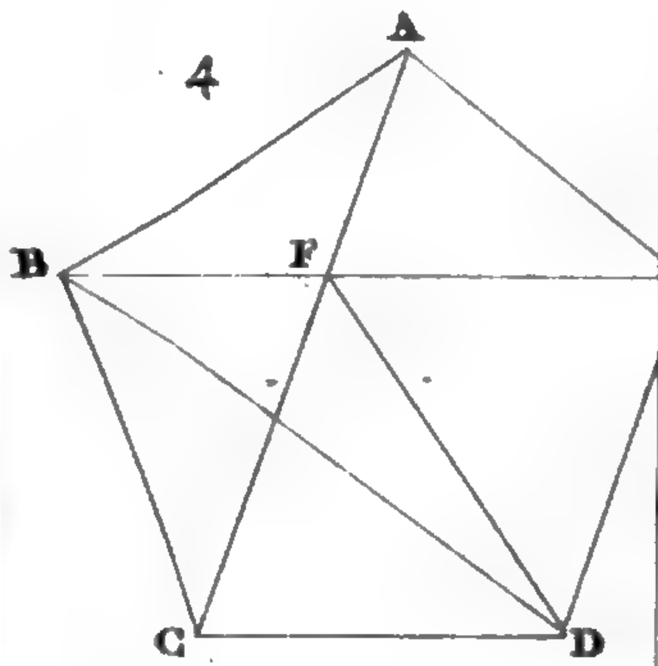

K
H
L
P
S
D
O
R
N
T
H
B
X
V

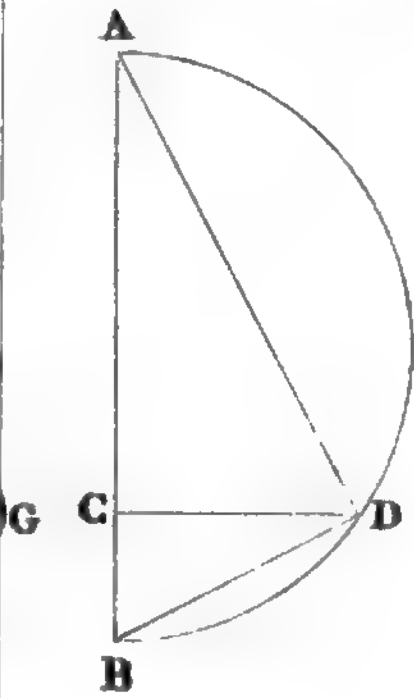

L
A
E
D
G
N
M
B
A
P
K
F
I
Q
H
R
O
76
S
N
C
T
Q

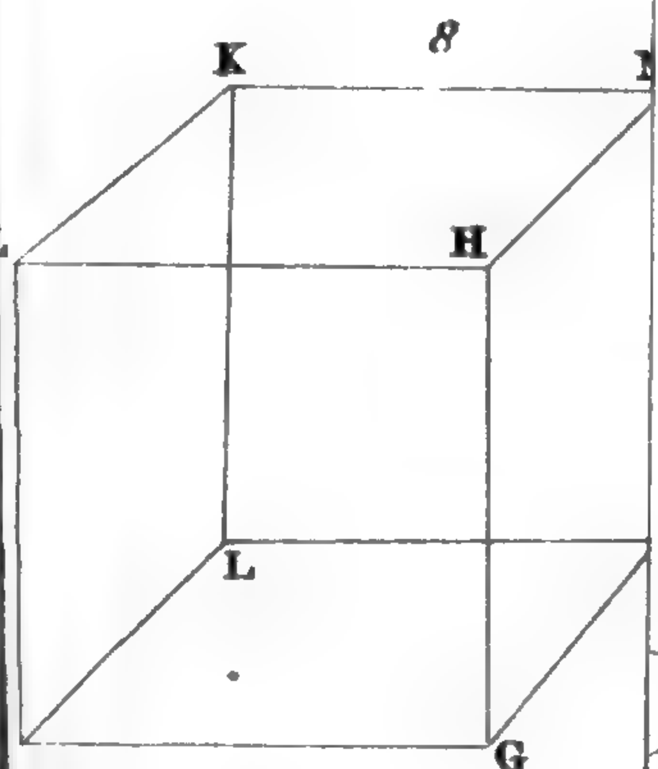

B
K
N
E
D
77
y
Y

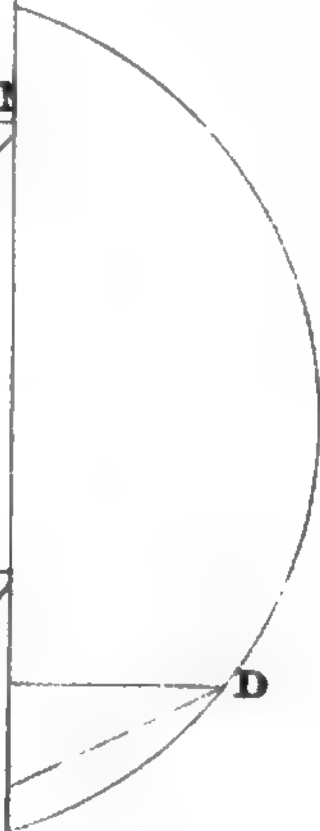

N
Z
M
R
V
Y
T

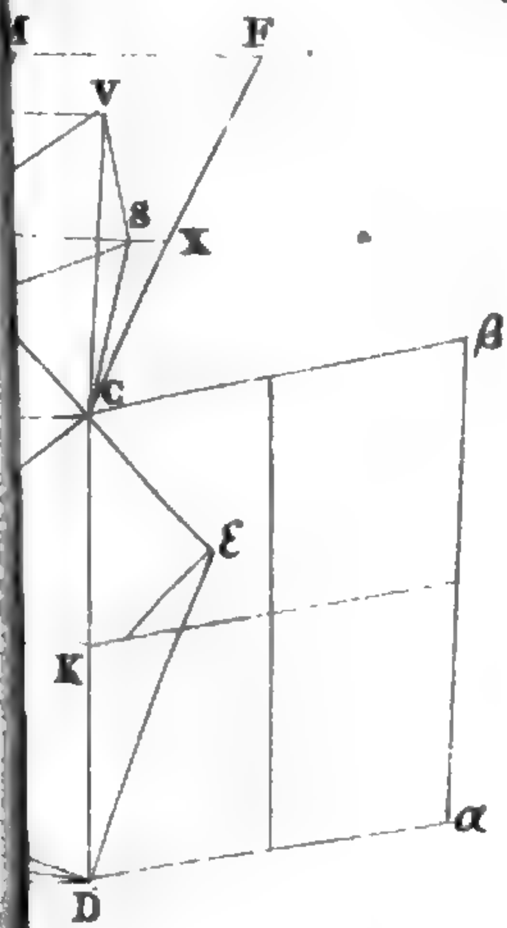

L
B
H
C
F
E
82
O

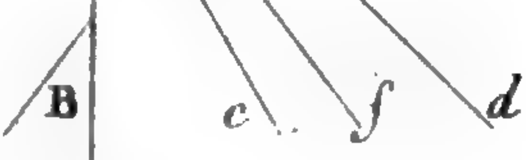

4
A
B
F
C
D


A
G
C
D
B


8
K
H
L
G


D


F
V
S
X
C
β
ε
K
α
D


B
c
f
d

CORSO

DI

GEOMETRIA ELEMENTARE

DIVISO IN DUE VOLUMI

APPENDICE

Che contiene la Trigonometria Rettilinea, e Sferica.

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA
RETTILINEA, E SFERICA

NAPOLI
PRESSO I FRATELLI CHIANESE
1813.



AVVERTIMENTO.

Dopo di aver pubblicata la parte elementare della Geometria, mi sono veduto nell' obbligo di acconsentire alle dimande che mi sono state fatte da diverse Scuole, le quali hanno adottato un tal Corso, di pubblicare la Trigonometria Sferica, ch'era loro indispensabile d'insegnare. Questo piccolo, e special ramo di scienze Matematiche aveva ancor bisogno di esser ridotto in una convenevol forma elementare, affinchè i giovani i quali debbono apprenderla dopo gli Elementi di Euclide, non restassero ad un tempo sopraffatti, dall' usar metodi approssimanti, e dal non stretto rigor geometrico nel nesso delle proposizioni, e nella maniera di dimostrarle. Con quanta ragione ciò dica, potrà rilevarsi dal vedere generalmente dimostrata, e da accorti Geometri, la teorìa dell' uguaglianza de' triangoli sferici, ed alcune altre proprietà di essi, che da tal teoría derivansi, cogli stessi principj che quella de' triangoli rettilinei; quando che questi, esistendo in un piano, possonsi sempre ridurre ad esser similmente disposti; il che non può avvenir ne' primi. Inoltre i principj per la loro riso-

luzione erano in generale vaghi, e soggetti nell' applicarsi, ad indurre talvolta in equivocô anche coloro, che sono sommamente versati in tal genere di ricerche. Ad evitar quest' altro inconveniente, il sommo Eulero, che non obbliò mai in mezzo a tante sue sublimi investigazioni, che il principal merito de' lavori di un Geometra consiste in facilitar l' intelligenza delle scienze Matematiche, occupatosi della Trigonometria Sferica in una Memoria inscrita negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1789, stabilì un principio, dal quale ne dedusse le principali condizioni della risoluzione de' triangoli sferici. Questo mezzo dall' Eulero adoperato, per mettere uniformità in una tale scienza, è stato da me prescelto; ed in tal modo l' intera Trigonometria Sferica viene ad esser compresa in tre Teoremi facilissimi a ritenersi, non che a dimostrarsi. Ma i libri elementari, siccome da una parte non debbono essere sì minuti da opprimere l' intendimento de' giovani, che gli studiano; così dall' altra non convien che siano sì brevi da tralasciare qualunque sviluppo si possa loro dare de' metodi, o delle teorìe generali. Quindi non credo di aver agito fuor di proposito aggiungnendo a' Teoremi de' quali poc' anzi parlava alcune semplificazioni, delle quali essi sono suscettibili pe' triangoli sferici rettangoli; e nell' aver trattato di alcuni altri tri-

angoli sferici, che possono ricevere delle speciali soluzioni. Or qualunque merito di semplicità, e di rigore possano avere le formole trigonometriche val nulla, allorchè non si trovan capaci a facilmente adattarcisi il calcolo logaritmico, del quale si fa uso nella risoluzione de' triangoli; e questa verità, che non poteva certamente sfuggire all' Eulero, gli fece soggiugnere alle formole da lui rinvenute un acconcia riduzione, perchè facile se ne rendesse la poc' anzi detta applicazione. Intanto queste riduzioni Euleriane riconducevano le sue formole a quelle regole, che con gran maestria espose la prima volta il Nepero nel suo dottissimo libro *Logaritmorum Canonis descriptio*; ed io ho voluto in questa parte seguir l'esempio del Geometra Scozzese, come può vedersi alla fine della mia Trigonometria Sferica.

E poichè non era possibile il dare un compiuto Trattato di Trigonometria Sferica, senza far lo stesso della Trigonometria Rettilinea, ho perciò dovuto occuparmi di questa un poco più di quel che non si era fatto, allorchè l'aggiunsi in fine al secondo volume della prima edizione del Corso.

Per non lasciar senza applicazione le due Trigonometrie, aveva stabilito di unirvi un breve Trattato di Geodesia, ed una Raccolta di pochi, ma importanti Problemi di Geogra-

sia Matematica, di Astronomia, e di Navigazione, e qualche cosa aveva già preparata di questo lavoro, che sono stato obbligato a sospender per ora; poichè le mie non lievi occupazioni d'obbligo, mi lasciano ben poco tempo da impiegare in altre cose.

ERRATA.

Pag. 14,	linea 9,	delle grandezze,	*leggasi* grandezze
16	7	60°	60′
20	1	RS	RN
36	27	in effetti	in effetto
37	14	in dove	dove
	E lo stesso alla pag. 43 linea 20		
61	19	*me*	*come*
65	Al n°. 114 vi corrisponde la fig. 15		
70	Al n°. 118		la fig. 16
73	4	golo	angolo
76	12	(N.4)	(dim.N.3)
	E lo stesso per la pag. 77 lin. 11		
78	*4*	*gli sono adjacenti*	*lo comprendono*

In qualche Tavola, nella fig.13 bisogna prolungare la retta Kc finchè incontri la circonferenza ALB in E, e porre intorno alla circonferenza ABK la lettera C. E nella fig. 14 bisogna segnare con A, D due punti nella circonferenza del cerchio inferiore.

PREFAZIONE.

In ogni triangolo, oltre allo spazio che vi si contiene, vi son pure, come l'è noto, tre lati, e tre angoli: e queste sei grandezze han tal nesso fra di loro, che date tre di esse, se pur queste non sieno i soli angoli della figura, si possono le altre tre geometricamente, ed in facil modo rilevare, come si ha dagli Elementi di Euclide. Ma non è così di loro, quando con valori aritmetici le une si propongano, e nella stessa divisa le altre vi si chieggan da esse. Imperciocchè essendo trascendente il rapporto de' lati di un triangolo agli angoli, ch'essi sottendono, niuna regola per l'indagine suddetta può mai sperarsi. Ma la risoluzione del triangolo, in che consiste cotesta special ricerca, è la base delle scienze geodetiche, ed astronomiche, ed ella nelle matematiche sì pure, che miste ancor s'impiega lodevolmente. Qual ripiego dunque n'escogitarono a tal uopo i Geometri antichi, o quale ne hanno supplito i moderni?

Essi adottano certe funzioni dell'angolo, che soglion dirsi linee trigonometriche. Dipoi *propongono una tavola di corrispondenza tra' valori degli angoli, e quelli delle loro funzioni*. E finalmente *prescrivono certi rapporti di esse funzioni a' lati di un triangolo, onde da quelli in facil modo la risoluzione della detta figura si ritragga*. Dunque le parti essenziali di questa scienza non

son che due, cioè quella fissazione di valori corrispondenti; e le regole dell'effettiva risoluzione del triangolo. La prima, che suol chiamarsi *Canone trigonometrico*, si eseguiva dagli antichi con operazioni aritmetiche a certe grandezze geometriche applicate: ed ora quei valori aritmetici da alcune analitiche espressioni si rilevano. E sì gli uni, che gli altri risultati non sono, che approssimanti.

Intanto è da dolersi, che la più parte de' Trigonometri non abbiano curato di avvertir queste cose a' giovanetti, non senza loro nocumento. Imperocchè nella parte elementare della Geometria, e nella sublime non si contemplano, che le sole geometriche grandezze; e con metodi esatti e rigorosi tutto vien quivi rilevato, proposto, e dimostrato. Laddove nella *Trigonometria* rinvengonsi certe grandezze continue in valori aritmetici, e co' metodi approssimanti risolvonsi i problemi. Ed i giovani passan di volo dall'un metodo all'altro, e da questo a quello ne ripiegano, ora contemplando le grandezze continue nella lor natura, ed ora sotto mentita forma di discrete; e spesso non v'è chi di quel divario gli avverta. Era dunque necessario, non solo per ragion di scienza; ma per utile de' giovani, premetter queste nozioni agli Elementi di Trigonometria, che qui imprendo a divisare brevemente, e con chiarezza.

ELEMENTI

DI TRIGONOMETRIA PIANA



DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Def.* I. I valori numerici de' lati, e degli angoli di un triangolo si possono chiamare *parti* di esso. E ciò secondo la frase de' Geometri antichi.

2. *Def.* II. *Risolvere un triangolo* è il rinvenir tre delle sei parti del triangolo dalle altre tre, che sien date; se pur queste non sieno i soli tre angoli della figura.

3. *Cor.* Quando sien dati i tre soli angoli della figura, non vi si potran da essi investigare i valori de' lati; ma sì bene la di loro proporzione. Imperocchè ella è in tal caso data di sola specie, e può averne infinite, che le sieno equiangole.

4. *Def.* III. La *Trigonometria Piana*, o *Rettilinea* è una scienza, che propone le regole per risolvere un triangolo.

5. *Scol.* Le regole dell'anzidetta risoluzione non intercedono tra i lati, e tra gli angoli del triangolo. Imperocchè il rapporto di quelle grandezze a queste è trascendente, e tal sarebbe altresì ogni operazione, che tra esse si prescriverebbe a quest' uopo. Quindi è, che i tre lati di un triangolo, ed i tre angoli di esso, che son le sei parti

di tal figura, non solamente differiscono gli uni dagli altri nella natura; ma i rapporti loro son puranche trascendenti. E qual mezzo ne han tenuto i Geometri per la suddetta risoluzione? Eccolo.

Qui soglionsi adottare certe rette, che diconsi *linee trigonometriche*, *funzioni degli angoli*, o *grandezze vicarie di essi*. Se ne descrive la lor natura, il modo d' indagarle, e la loro corrispondenza agli angoli rispettivamente. Di poi le regole della riferita risoluzione propongonsi tra' lati del triangolo, e tra le linee trigonometriche suddette. E nella prima, e nella seconda parte di questa teoria mostrerò chiaramente sì l' uno, che l' altro di questi due nobilissimi artifizj. Prima d' ogn' altro però è necessario che qualche cosa si dica.

DELLA MISURA DEGLI ANGOLI, E DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA.

6. Siccome gli angoli posti al centro di un cerchio serbansi la stessa ragione, che gli archi da' quali sono sottesi (33.VI.); si posson perciò questi prender benissimo per misura di quelli. Quindi per ridurre sì gli angoli, che gli archi a grandezze discrete, il che molto interessa gli usi trigonometrici, e le operazioni di Geodesia, i Geometri hanno supposto che il cerchio sia diviso in un determinato numero di parti. E siccome per la costruzione del canone trigonometrico, del quale or ora parleremo, era anche molto impor-

tante, che tal numero di parti in cui si suppone divisa la circonferenza ammettesse un gran numero di divisori esatti; perciò essi scelsero il 360. Ciascuna di tali parti, che si chiama *grado*, la supposero poi divisa in 60 altre parti, chiamate *minuti primi*: e così ciascun minuto primo lo suddivisero in 60 *secondi*, ciascun secondo in 60 *terzi* ec.

Ad indicare i gradi, i minuti primi, i secondi, ec. sogliono i Trigonometrici servirsi del °, ′, ″ nel modo seguente; così per esprimere un arco, o un angolo di 55 gradi, 23 minuti primi, e 44 secondi, scrivono 55° 23′ 44″.

L' indicata divisione del cerchio ha servito lungo tempo, e vantaggiosamente tutti coloro, che hanno dovuto avvalersi della Trigonometria per applicarla alla Geodesia, all' Astronomia, ed alla Navigazione, nè alcun inconveniente osservavasi nel maneggio delle ordinarie *Tavole de' seni*. Intanto uno spirito di novità ha fatto ultimamente cambiare questa divisione della circonferenza in un' altra decimale, che da circa un secolo era stata progettata dal Keill; vale a dire si è divisa la circonferenza in 400 parti, e poi ciascuna di queste, che si è anche chiamata *grado*, si è successivamente divisa in 100 minuti primi, secondi, ec. e con questa nuova divisione si sono anche costruite dal Sig. Borda delle Tavole de' seni; e delle altre anche più estese ne ha poi fatte eseguire il Sig. Prony; ma che per la loro estrema lunghezza non si sono pubblicate. Or siccome questa nuova divisione, oltre al non aver alcun vantaggio

deciso sull' antica, offre di più il grande inconveniente di doversi continuamente ridurre que' calcoli in cui si è fatto uso dell' antica divisione, e de' quali conviene avvalersi qualche volta; perciò essa non è stata generalmente adottata: e noi pensiamo con molti dotti Trigonometri moderni, non escluso il Cagnoli, che valga meglio servirsi dell' antica.

Per completare la misura degli angoli per gli archi di cerchio, stabiliremo i seguenti due Teoremi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

7. *Tutti gli archi di cerchio descritti tra i lati di un angolo, preso per centro il suo vertice, contengono lo stesso numero di gradi e minuti.*

Sia l' angolo BCR (*fig.*1), e tra i suoi lati vi sieno descritti co' raggi CB, C*b*, e col medesimo centro C gli archi circolari BR, *br*, e di più sien completati i quadranti BAC, *ba*C; starà l' angolo BCR all' angolo BCA, come l' arco BR all' altro BA (33. VI.). E similmente l' angolo *b*C*r* sta all' altro *b*C*a*, come l' arco *br* all' arco *ba*. Ma l' angolo BCR sta all' altro BCA, come l' angolo *b*C*r* all' altro *b*C*a*: dunque sarà pure l' arco BR all' arco BA, come l' arco *br* all' arco *ba*; cioè il numero de' gradi e minuti di BR starà a 90°, come il numero de' gradi e minuti di *br* a 90°,

Laonde gli archi BR, *br* dovranno essere dello stesso numero di gradi e minuti. C. B. D.

8. Cor. Da ciò si vede che qualunque sia il raggio di un cerchio, non si cambia mai quel numero, ch' esprime il valore di un angolo, ch' è al centro di questo.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

9. *Due angoli disuguali posti a' centri di due disuguali cerchi, sono tra loro in ragion composta da quella degli archi che li sottendono, e dall' inversa de' raggi de' cerchi.*

Sieno i due angoli BCS, *b*C*r* (*fig.*2) posti a' centri di due cerchi, che abbiano disuguali i raggi CB, C*b*, e che si suppongano descritti intorno al comune centro C. È manifesto che l'angolo BCS stia all' altro BCR, come l'arco BS all'arco BR (33.VI.). Ma è poi BS a BR in ragion composta di BS : *br*, e di *br* a BR (d.A.V.), ossia di BS a *br*, e di C*b* a CB. Dunque starà pure l'angolo BCS all' altro BCR, cioè a *b*C*r*, in ragion composta dalla ragion degli archi BS, *br* che gli sottendono, e dalla reciproca de' raggi C*b*, CB di que' cerchi intorno a cui centri essi sono posti. C.B.D.

PARTE I.

DELLA NATURA, ED INDAGINE DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

10. *Def.* IV. *Complemento di un arco* è la differenza di esso dal quadrante.

E *supplemento di un arco* è la differenza di esso dalla semicirconferenza.

Così l' arco di 30° tien per complemento quello di 60°, e 'l complemento di 60° è l' arco di 30°.

E l' arco di 150° è il supplemento di quello di 30°.

11. *Def.* V. *Seno d' un arco* è la perpendicolare, che si abbassa da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro estremo. Questo seno suol dirsi *seno retto*, o *seno primo*.

12. *Cor.* Il seno d' un arco è lo stesso di quello del di lui supplemento.

13. *Def.* VI. *Tangente* d' un arco è quella retta, che il tocca in un suo estremo, e si distende insino al raggio prodottovi per l' altro estremo.

14. Def. VII. E tal raggio prodotto insino alla tangente di un arco, si dirà di lui *segante*.

15. *Def.* VIII. Il *coseno di un arco* è il seno del di lui complemento. La *cotangente* di un arco è la tangente del di lui complemento. E si dirà *cosegante* di un arco la segante del complemento di esso.

16. *Def* six. Il *senoverso* di un arco è la differenza del raggio dal coseno di esso.

17. *Scol.* Così per illustrare le precedenti definizioni, ad un punto qualunque M (*fig.* 3) del quadrante AMD si conduca il raggio CM, che si produca verso T. Ed abbassate dal detto punto le perpendicolari MP, ed MQ su i raggi AC, CD; si tirino agli estremi A, e D del quadrante le tangenti AT, DS, che incontrino in T, ed S il raggio CM.

Sarà MP il seno dell'arco MA; AT ne sarà la tangente; e CT la segante. Inoltre le rette MQ, DS, CS si diran coseno, cotangente, e cosegante del detto arco AM rispettivamente; poichè tali rette sono il seno, la tangente, e la segante dell' arco MD, ch' è il complemento di AM. E finalmente la PA sarà il senoverso del proposto arco AM. E queste linee trigonometriche, che i Geometri hanno adottate per la risoluzione de' triangoli, come più giù faremo vedere, hanno il seguente nesso fra loro.

Per la similitudine de' triangoli TAC, MPC sta AT ad AC, come MP a PC, cioè *la tangente dell' arco AM al raggio, come il seno dello stesso arco al suo coseno*. Ed essendo parimente CT a CA, come CM a CP; starà *la segante di un arco al raggio, come il raggio al coseno*. Finalmente per la somiglianza de' triangoli CAT, CDS, dee stare TA ad AC, come CD a DS, cioè *il raggio dee esser medio proporzionale tra la tangente, e la cotangente di un arco*.

Laonde indicando per φ un qualunque arco, si avrà, traducendo in linguaggio algebrico le tre

proporzioni quassù indicate, e poi prendendo i valori di tang.ϕ, seg.ϕ, ec., e dinotando per R il raggio

$$\text{tang.}\phi = \frac{R.\text{sen.}\phi}{\text{cos.}\phi}\ ; \quad \text{seg}\,\phi = \frac{R^2}{\text{cos.}\phi}\ ,$$

$$\text{cot.}\phi = \frac{R^2}{\text{tang.}\phi} = \frac{\text{cos.}\phi}{R.\text{sen.}\phi}\ ;$$

il che dinota che la *cotangente di un arco sia inversamente come la tangente del o stesso*.

18. *Scol.* 2. Siccome la grandezza di un angolo non può eccedere i 180°; perciò i limiti delle linee trigonometriche sono stati da' Trigonometri fissati a 0°, e 180°. Or è egli chiaro, che cominciando a contar gli archi dall' estremo A del semicerchio ADB, e verso l' altro estremo B, un arco 0° debba avere per seno, per tangente, e per senoverso anche 0; ma che abbia poi per coseno, e per segante il raggio. E ciò può rilevarsi dalle addotte definizioni. A proporzione che il punto M, ch' è l' altro estremo dell' arco AM si discosta da A, le linee trigonometriche di quell' arco, cioè il seno MP, la tangente AT, la segante CT, ec. sono espresse in grandezze finite, e vanno successivamente crescendo fino alla metà del quadrante, cioè fino a 45°; mentre al contrario decrescono continuamente il coseno CP, la cotangente DS, e la cosegante CS. Segnando il punto M i 45°, le linee trigonometriche dell' arco AM, e quelle del suo complemento DM si fanno tra loro uguali: ed è anche chiaro che essendo CP=PM, sia pure CA =AT; cioè, che *la tangente*, e *la cotangente dell'*

arco di 45° sieno quant' il raggio del cerchio. Oltrepassando il punto M i 45°, per approssimarsi a D, le linee trigonometriche dell'arco AM continuano a crescere, e decrescono quelle dell' arco DM, finchè divenendo l' arco AM di 90°, cioè cadendo il punto M in D, il seno diventa quant' il raggio, il coseno si fa zero, la tangente, e la segante infinite; poichè le AT, e CD divenendo parallele non possono mai più incontrarsi. E finalmente la cotangente diventando anche zero, la cosegante si fa uguale al raggio. E siccome il raggio è la massima delle normali al diametro AB; perciò il seno del quadrante dicesi *seno massimo*, ed anche *seno tutto*; poichè gli altri seni sono parti di esso. Cominciando il punto M il suo cammino nell' altro arco DB, cominciano a decrescere i seni, ed a crescere i coseni: e se per M si tiri MM' parallela ad AB, è chiaro che l'arco M'B supplemento dell'arco AM' sia uguale all'arco AM. Ma l'arco AM, e l'altro AM' hanno lo stesso seno (10): dunque siccome al crescere dell' arco AM' deve decrescere il suo supplemento AM, e divenir, per conseguenza, più grande il complemento MD di questo; perciò ne segue che il seno dell'arco AM' decresca a proporzione, che il punto M' si accosta a B, e che vada al contrario crescendo il coseno.

Intanto essendo il coseno in generale quanto la differenza del raggio, e del senoverso di uno stesso arco, sarà cos.AM'=AC—AP', cioè = — CP', cioè = — CP, giacchè l' AP' è maggiore del raggio AC. Vale a dire che *un arco maggiore del qua-*

drante ha lo stesso coseno del suo supplemento; ma preso negativamente. Inoltre la tangente dell'arco AM', cioè la AV, come rilevasi dall' ispezione della figura, essendo un quarto proporzionale in ordine al coseno dell' arco AM', cioè a —CP, a PN, e CA, sarà espressa da $\frac{PN \times CA}{-CP}$, e quindi anche negativa. E così pure la cotangente DS' di un tal arco, per essere uguale a $\frac{CD \times -QM'}{CQ}$, sarà pure negativa. E finalmente lo sarà anche la segante CV, ch'è quanto $\frac{CA^2}{-CP}$. Or paragonando l' espressione della tangente dell' arco AM' con quella che fu esibita nel n. 17 per l' arco AM, si vedrà ch' esse sono identiche, e solamente diverse nel segno; dal che se ne rileva, che *un arco ed il suo supplemento hanno la stessa tangente; ma che questa dev' esser presa negativamente*. E lo stesso può dirsi per la segante.

Questa diversità di segni tra alcune linee trigonometriche dell' arco AM', e quelle del suo supplemento AM, che noi abbiamo rilevata dalla natura stessa di tali linee, poteva anche dedursi dalla contrarietà della loro posizione. In fatti la CP' coseno dell' arco AM' è contrariamente posta a CP coseno dell' arco supplementale AM, e gli è uguale; e così pure la AV tangente dell' arco AM è in opposizione con AT tangente dell' arco supplementale AM, e gli è pure uguale; e finalmente CV segante dell' arco AM' sta opposta a CT' segante dell'arco BM', cioè di AM supplemento di AM'.

Allorchè il punto M, avendo percorsa l'intera semicirconferenza ADB giugne in B, svanisce di nuovo il seno, come in A; il coseno, e la segante si fanno di nuovo uguali al raggio, ma negativamente preso; e la tangente divien zero: sicchè gli accidenti degli archi 0°, e 180°, come in generale di due archi supplementali, sono gli stessi; ma diversi nel segno, eccetto che per lo seno.

Si potrebbe anche continuar questa considerazione sulle linee trigonometriche, supponendo che il punto M continui a scorrere nell' altra semicirconferenza BEA, ed anche che dopo di aver egli percorsa una, due, o più circonferenze, continui tuttavia il suo moto, cioè si potrebbero valutare le linee trigonometriche di un arco maggiore del semicerchio, e di un arco composto da una, o più circonferenze di un cerchio stesso, e da qualunque arco di esso; ma queste considerazioni sono aliene da un trattato di Trigonometria Elementare; nè poi, come si è detto di sopra, possono interessare affatto l'oggetto di questa scienza. Noi dunque ci limiteremo a dare la seguente

TAVOLA DE' SEGNI DELLE PRINCIPALI LINEE TRIGONOMETRICHE IN DUE QUARTI DI CERCHIO.

Arco	Seno	Coseno	Tang.
0°	+ 0	+ R	+ 0
Dopo 0° fino a 90°	+	+	+
90°	+ R	+ 0	+ ∞
Dopo 90° fino a 180°	+	—	—
180°	+ 0	— R	— 0

19. Il seno di un arco, la di lui tangente, la segante, il coseno, la cotangente e la cosegante sono le linee trigonometriche adottate da' Geometri per la risoluzione del triangolo.

20. Le linee trigonometriche dell'arco AM, appartengonsi eziandio all' angolo ACM, di cui quello n' è misura (6).

21. Or le citate linee trigonometriche, non essendo in effetto delle grandezze geometriche, come par che indichino le quassù rapportate definizioni; ma bensì numeri, esse posson modificarsi nella seguente convenevol forma. Cioè, prendendo il raggio per l' unità delle linee trigonometriche.

Il seno dell' arco AM è il valor numerico, che vi tien la perpendicolare abbassata da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro; la tangente di un arco è il rapporto del seno al coseno di esso, cioè $\text{tang.}\phi = \frac{\text{sen.}\phi}{\cos.\phi}$. E la segante è il rapporto del raggio al coseno, cioè $\text{seg.}\phi = \frac{1}{\cos.\phi}$.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

22. *Le linee trigonometriche di due archi dello stesso numero di gradi e minuti, presi in cerchi diversi, sono proporzionali ai raggi de' cerchi.*

Intorno al centro C (*fig.* 1) si descrivano co' raggi

CB, C*b* i due quadranti circolari BRA, *bra*, e poi si tiri il raggio CR*r* : è manifesto che i due archi BR, *br* sottendendo lo stesso angolo in C, debbano essere dello stesso numero di gradi, e minuti (7.). Ciò premesso si tirino tutte le linee trigonometriche di tali archi; è chiaro che i triangoli CRN, C*rn* sono simili tra loro; e che perciò le RN, *rn*, e le CN, C*n* sono proporzionali ai raggi CB, *cb* : ed essendo CB : C*b* :: CN : C*n*; sarà permutando, dividendo, e di nuovo permutando BN : *bn* : : CB : C*b*. Essendo poi simili gli altri triangoli CBD, C*bd*, sta BD : BC :: *bd* : *b*C. Si è dunque dimostrato che le linee trigonometriche dell' arco BR, e quelle dell' altro *br* sono proporzionali a' raggi CB, C*b*. C.B.D.

23. *Cor.* 1 Quindi quel numero ch'esprime le linee trigonometriche in un dato cerchio, per un arco determinato, e pel raggio diviso in un dato numero di parti, rappresenterà anche le linee trigonometriche di un arco dello stesso numero di gradi in un altro cerchio; purchè il raggio si supponga diviso similmente. E se i raggi di due cerchi sien rappresentati da numeri diversi; le linee trigonometriche corrispondenti a due archi dello stesso numero di gradi, presi in essi, dovranno esser dinotate da numeri proporzionali a quelli esprimenti i raggi.

24. *Cor.* 2. Adunque non si cambierà nulla al valor delle linee trigonometriche di un arco in parti del raggio, se questo si supponga $=1$. Ed una tal supposizione è stata adottata da tutt' i Trigonometri, perchè la più semplice, e la più comoda.

25. *Def.* x. *Canone trigonometrico* è una tavola,

ove a ciascun arco minore del quadrante, ed espresso ne' suoi gradi, e minuti, ascrivonsi i valori numerici delle linee trigonometriche, che gli appartengono, presovi per unità il raggio. Un tal registro di linee trigonometriche, dicesi volgarmente *Tavola de' seni*.

26. *Cor.* Dividendosi ogni grado in 60° il quadrante, ch' è di 90°, sarà di 5400', Laonde saran pure 5400 quegli archi minori del quadrante, che vadan successivamente crescendo di un minuto.

Nella tavola de' seni il primo arco, cui appongonsi le sue linee trigonometriche, è di 1'. Il secondo è di 2'; e così successivamente per 5400 termini, l' ultimo de' quali è di 90°. E per evitare i fratti nel computo di ciascuna linea trigonometrica, il raggio, ch' erasi preso per l' unità, s' intende diviso in 10,000,000, o più parti decimali. E ciascuna di dette linee vedrassi espressa nel solo numeratore di un fratto decimale, cui si sottintende il denominatore 10000000.

27. *Scol.* Il canone trigonometrico riducesi a risolvere il seguente general problema. *Dato il rapporto numerico di un arco al quadrante, ritrovare il rapporto, che serbi al raggio, ciascuna linea trigonometrica di esso arco.*

La costruzione di questo canone, che può eseguirsi per più vie analitiche, e sintetiche, sarà quaggiù rapportata colla più agevol geometrica condotta. Esso suol distinguersi in *lineare*, o *naturale*; ed *artificiale*, o *logaritmico*. Il lineare è il già definito. E 'l logaritmico esibisce i logaritmi volgari delle linee trigonometriche, come nelle comuni tavole de' seni si osserva.

DELLA COSTRUZIONE DEL CANONE LINEARE

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

28. *Se son date l'espressioni numeriche di due lati di un triangolo rettangolo, sarà anche data quella del rimanente lato. E ciò sovente ottiensi per approssimazione.*

Cas. 1. Suppongansi dati i valori de' cateti RN, ed NC (*fig.* 4) del triangolo RNC rettangolo in R; sarà la somma de' quadrati di questi due valori, o di questi due numeri, uguale al quadrato di quel numero, che n'esprimerebbe l'ipotenusa RC. Dunque la radice quadrata della somma dell'espressioni de' due cateti NR, NC sarà l'espressione dell'ipotenusa RC. Che se la retta RC sia incommensurabile alle RN, NC, come il più delle volte avviene, l'anzidetta radice non potrà aversi esattamente, ma per approssimazione; e tal ne sarà il valore dell'ipotenusa RC.

Cas. 2. Se diasi di espressione l'ipotenusa CR, e'l cateto NR, l'altro cateto NC sarà espresso dalla radice della differenza del quadrato dell'ipotenusa CR, e di quello del cateto RN. Lo che si dimostra come nel precedente caso. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

29. *Il coseno d'un qualunque arco è la radice della differenza del quadrato del raggio, e del quadrato del seno di esso arco.*

L'arco (*fig* 4) RB tien per seno il valor numerico della perpendicolare RN calata dal suo estremo R sul raggio CB, che passa per l' altro estremo B. E lo stesso arco ha per coseno il valore numerico della RM, o della sua uguale NC. *Di più* il raggio trigonometrico RC si è posto uguale ad 1. Dunque dalle date espressioni dell' ipotenusa RC, e del cateto RN del triangolo rettangolo RNC, che sono il raggio, e 'l seno dell'arco RB, si avrà, per lo teorema precedente, il valore dell'altro cateto CN, cioè del coseno dell' arco RB, ed ci sarà la radice della differenza de' quadrati del raggio, e del seno di esso arco. C. B. D.

30. *Cor.* 1. Suppongasi esser l' arco RB di 30° : il suo complemento RA ne avrà 60°. Ed essendo uguale al raggio la corda RA di questo arco, ch' è la sesta parte della periferia (c.15.IV.); i due triangoli RMC, RMA, che han le condizioni della 26. El. I., avran pure uguali i lati CM, ed MA. Onde dovrà esser la retta CM, o la sua uguale RN metà del raggio CA.

31. *Cor.* 2. Dunque il seno dell' arco di 30° è la metà del raggio. Sicchè ponendo uguale all' u-

nità cotesto raggio, sarà sen. $30^o = \frac{1}{2}$. E 'l coseno di 30°, ch' è uguale a $\sqrt{(1-\frac{1}{4})}$, sarà $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

PROPOSIZIONE VI.

32. *Il seno della metà di un arco è la metà della radice della somma de' quadrati del seno, e del senoverso di esso arco.*

Sia REB un arco (*fig* 4), RN il suo seno, ed RB la sua sottesa. Dal centro C si abbassi la CE perpendicolare alla RB. Ella dovrà bisegare sì l' arco REB, che la sua corda. Onde la RD dovrà esser seno dell' arco RE metà di REB; ma la RB è la radice de' due quadrati di RN, e di NB presi insieme. Dunque la RD, ch' è il seno dell' arco RE, sarà la metà della radice de' due quadrati di RN, e di NB, l' uno fatto dal seno dell' intero arco, e l'altro dal di lui senoverso. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

33. *Il seno della somma di due archi è quanto la somma de' due prodotti, che si hanno moltiplicando il seno dell' uno per lo coseno dell' altro; posto però il raggio* $=1$.

E il seno della differenza di essi archi è quanto la differenza positiva di que' prodotti stessi.

Sieno BE, ER gli archi proposti (*fig*.5), i cui se-

*

ni sieno EH, RD, e CH, CD i coseni: sia poi RS il seno della loro somma, cioè dell'arco REB, PQ il seno della differenza di essi, cioè dell' arco PB.

Si compia la figura come si vede. Ed essendo simili i triangoli CEH, CDG sta CE:EH :: CD:DG cioè (chiamando ϕ, e θ gli archi BE, ER, e dinotando per 1 il raggio CE, come suol farsi) 1 : sen ϕ :: cos.θ : DG = sen ϕ.cos.θ. Similmente per gli altri triangoli simili RDF, CEH sta CE : CH :: RD : RF, cioè 1 : cos.ϕ :: sen.θ : RF. E sarà quindi RF = sen.θ.cos.ϕ. Laonde la RN, cioè sen.(ϕ+θ), essendo = NF+FR, o sia a GD+FR, sarà quanto sen ϕ.cos.θ+sen.θ.cos.ϕ.

Or per essere RD = DP è anche RF = FS: che perciò PQ, cioè sen.(ϕ—θ), ch' è quanto DG—FR, sarà uguale a sen.ϕ.cos.θ—sen.θ.cos.ϕ. Cioè il seno della somma di due archi ec. C.B.D.

34. *Cor.* 1. Se i due archi RE, e BE sieno uguali, e con ciò uguali i loro seni, ed i loro coseni rispettivamente; la RN seno della somma di essi archi sarà doppia di una di quelle due quarte proporzionali. Ed in tal caso si rileverà esserne *Il raggio al coseno doppio di un arco, così il seno di esso arco al seno del suo doppio.*

35. *Cor* 2. E se l' arco EB sia di 60°, il suo coseno CH sarà = ½EC (31); e quindi essendo CE : CH :: RD : RF, sarà anche RD doppia di RF, e perciò uguale ad RS. Laonde la RN, ch' è seno della somma degli archi BE, ER, essendo uguale ad NS+SR, sarà quanto PQ+RD. Ma PQ è uguale al seno di BE—EP, o sia di BE—ER. Adunque

Il seno di un arco maggiore di 60° è quanto la somma di due seni, uno dell' eccesso dell' arco proposto su quello di 60°, e l' altro della differenza tra l' arco di 60° e l' eccesso poc' anzi detto.

Cioè $\text{sen}.61° = \text{sen}\ 59° + \text{sen}.1°$

$\text{sen}.62° = \text{sen}.58° + \text{sen}.2°$

ec.

36. *Scol.* Gli stessi triangoli simili ECH, DCG danno anche la seguente analogia CE : CH :: CD: CG, cioè $1 : \cos.\phi :: \cos.\theta : CG = \cos.\phi.\cos.\theta$: Ed è poi per gli altri triangoli anche simili CEH, RDF, CE : EH :: RD : DF, cioè $1 : \text{sen}.\phi :: \text{sen}.\theta : DF = \text{sen}.\phi.\ \text{sen}.\theta$. Laonde CN, ch' è uguale a $CG - GN = CG - DF$, sarà quanto $\cos.\phi.\ \cos.\theta - \text{sen}.\phi.\ \text{sen}.\theta$; e CQ, ch' è quanto $CG + GQ$, cioè $CG + GN$, per essere $GQ = GN$, siccome è $PD = DR$, sarà uguale a $\cos.\phi.\cos.\theta + \text{sen}.\phi.\text{sen}.\theta$. Ma CN è lo stesso che $\cos.(\phi+\theta)$, e CQ è quanto $\cos.(\phi-\theta)$. Laonde sarà

$$\cos.(\phi+\theta) = \cos.\phi.\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

e $$\cos.(\phi-\theta) = \cos\ \phi.\cos.\theta + \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

Cioè *il coseno della somma di due archi è quanto il prodotto de' coseni di essi archi, meno l' altro de' loro seni: ed il coseno della differenza di due archi pareggia la somma de' prodotti poc' anzi indicati.*

Inoltre essendo

$$\text{sen}.(\phi+\theta) = \text{sen}.\phi\ \cos.\theta + \text{sen}.\theta.\cos.\phi$$

e $$\cos.(\phi+\theta) = \cos.\phi.\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

sarà $$\frac{\text{sen}.(\phi+\theta)}{\cos.(\phi+\theta)} = \frac{\text{sen}.\phi.\cos.\theta + \text{sen},\theta.\cos.\phi}{\cos.\phi\ .\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi}$$

e dividendo il numeratore, e denominatore di

quest' ultimo fratto per $\cos\phi.\cos.\theta$, si avrà

$$\frac{\text{sen.}(\phi+\theta)}{\cos.(\phi+\theta)} = \frac{\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos.\phi} + \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}}{1 - \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos.\phi} \times \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}}$$

e quindi sostituendo invece del seno diviso per lo coseno, la tangente dell'arco corrispondente (17), si avrà

$$\text{tang.}(\phi+\theta) = \frac{\text{tang.}\phi + \text{tang.}\theta}{1 - \text{tang.}\phi \times \text{tang.}\theta}$$

E similmente si sarebbe potuto rilevare esser

$$\text{tang.}(\phi-\theta) = \frac{\text{tang.}\phi - \text{tang.}\theta}{1 + \text{tang.}\phi \times \text{tang.}\theta}$$

Cioè *la tangente della somma di due archi è quanto la somma delle tangenti di essi, divisa pel raggio minorato del prodotto delle stesse tangenti. E la tangente della loro differenza è quanto la differenza di quelle tangenti, divisa pel raggio accresciuto del prodotto di esse.*

E queste cose sono state quì rapportate, a sol' oggetto di render completa la teoria stabilita nella Proposizione, della quale abbisognavamo per la costruzione del Canone.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

37. *Se i tre archi BP, BE, BR sieno in proporzione aritmetica, sarà il raggio al doppio coseno dell'arco medio BE, come il seno della diff renza di questi archi alla differenza de' seni degli archi estremi BP, BR,*

Qui sopra si è dimostrato essere CE a CH, come DR ad RF (33). Dunque duplicando i conseguenti avremo CE alla dupla CH, come RD ad RS; e queste rette corrispondono alle linee trigonometriche disegnate nell' enunciazione. Dunque ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

38. *Se gli archi AB, AC, AD, AE, ec. che abbiano un comune estremo A siano nella ragione de' numeri 1,2,3,4,ec.; la corda di ciascun arco starà alla somma delle corde di quegli archi in mezzo a' quali quello si ritrova, per esempio AC ad AB+AD, nella costante ragione del raggio al doppio coseno della metà della differenza degli archi.*

Si congiungan le corde BC, e CD (*fig* 6); poi si faccia l' angolo ACH uguale all' altro ABC: ed indi l' altra corda AD si prolunghi, fintanto che incontri in H la CH. Saranno equiangoli i due triangoli ABC, ACH; come quelli, che hanno uguali sì gli angoli ABC, ACH, che gli altri BAC, CAH, perchè insistenti sugli archi uguali BC, CD. Onde sarà AB a BC, come AC a CH: e quindi AC uguale a CH, come è AB uguale a BC. Inoltre il triangolo BAC è uguale e simile all' altro CDH, per aver essi le condizioni della 26 El. I., cioè l' angolo ABC uguale all' altro CDH;

poichè ciascuno di essi unito all' angolo CDA fa due retti (13. 1, e 22. III.): e l' angolo BAC si è mostrato uguale a CHD, e'l lato AC all'altro CH. Dunque sarà AB uguale a DH. Ed essendo, per la similitudine de' triangoli ABC, ACH, AB ad AC, come AC ad AH; sarà AB ad AC, come AC ad AD+AB. Ma la prima di queste due ragioni (34) è quanto quella del raggio al doppio coseno della metà dell' arco AB: dunque a questa ragione dovrà essere uguale quella della corda media AC alla somma delle estreme AD, AB. E se facciasi l' angolo ADK uguale ad ACH, o ad ABC, si dimostrerà, come quì sopra, essere l' angolo DEK uguale ad ACD, ed il triangolo ADK simile ad ACH, o ad ABC. Laande si conchiuderà esser pure AD: AC+AE, come il raggio al doppio coseno della metà di AB. C.B D.

39. *Cor.* 1. Pongasi il raggio trigonometrico uguale all' unità; e si chiami ϕ la metà dell' arco AB; sarà $1 : 2\cos\phi :: \frac{1}{2}AC : \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD$, prendendo la metà de' termini della seconda ragione. E così più appresso dovrà essere $1 : 2\cos\phi :: \frac{1}{2}AD : \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AE$.

40. *Cor.* 2. Ma $\frac{1}{2}AB$ è uguale al seno dell' arco $\frac{1}{2}AB$ (p.6.). E così pure $\frac{1}{2}AC$ è seno dell'arco $\frac{1}{2}AC$. Dunque sarà

$$1 : 2\cos.\phi :: \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}AB + \text{sen.}\tfrac{1}{2}AD$$

$$\text{ed } 1 : 2\cos.\phi :: \text{sen.}\tfrac{1}{2}AD : \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC + \text{sen.}\tfrac{1}{2}AE.$$

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

41. *Ritrovare il seno dell' arco di 1'*,

I poligoni regolari di 16384 lati iscritto, e circoscritto ad un cerchio del raggio 1, con un approssimazione portata fino a 15 cifre decimali, sono rispettivamente espressi da 3,141592576586860, e 3,141592692091258, come può rilevarsi nella maniera prescritta nelle Propp. 1 e 2 della Misura del cerchio. Ciò posto, se si determini la perpendicolare, che dal centro del cerchio cade su di un lato del poligono iscritto, facendo come il poligono circoscritto all' iscritto, così il quadrato del raggio al quadrato di questa perpendicolare, ed estraendo da un tal quarto proporzionale la radice quadrata, si avrà in tal modo la doppia altezza di quel rettangolo, che pareggia questo poligono, e la cui base è il perimetro di esso: che perciò un tal perimetro potrà determinarsi, ed esso sarà espresso da 6,2831852788374 25. In simil guisa si determinerà il perimetro del poligono circoscritto, che è 6,283185384 18256: laonde dividendo ciascun di questi due numeri per 16384, numero de' lati di ciascuno di tali poligoni, i quoti 0,0003834951, e 0,0003834952, i quali non differisconsi, che nella 10ma cifra decimale solamente, rappresenteranno due lati di essi. Adunque l' arco di cerchio ch'è sotteso da un lato del

poligono di 16384 lati differiscesi dalla sua corda per meno che $\frac{1}{10000000000}$ del raggio; e per conseguenza un tal arco, e la sua corda, con un'approssimazione assai più che sufficiente per gli ordinarj usi trigonometrici, potranno prendersi per uguali. Ma quest'arco è precisamente di 1′19″6‴5⁗ 37′′′′′30′′′′′′, come può vedersi dividendo la circonferenza, e quindi i 360° per metà, tante volte, quante se ne richiede per pervenire a 16384 parti, cioè 14 volte (*p.* 1 *mis. del cer.*). Dunque con più ragione potrà supporsi che si confonda colla corda contermine l'arco di 1′: e perciò potrà stabilirsi la seguente proporzione, l'arco di 1′19″6‴5⁗37′′′′′30′′′′′′ a quello di 1′, come la corda di quello alla corda di questo, cioè come 0,0003834951 ad x, che sarà la corda dell' arco di 1′, della quale presane la metà, si avrà il seno dell' arco di mezzo minuto; e da questo se ne dedurrà poi quello di 1′ (34). C.B.F.

42. *Cor.* Nel prendere il valore dell'arco di 1′ da quello di mezzo minuto primo, cioè 30″, servendosi dell' espressione sen. 1′ = 2sen.30″.cos.30″, (34) è facile il vedere, che cos. 30″ sia presso che uguale al raggio, cioè ad 1, e che perciò sen.1′ = 2 sen.30″. Vale a dire, che si può a dirittura prendere per seno di 1′ la corda di quest' arco.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

43. *Esporre co' principj precedenti l' effettiva formazione del canone trigonometrico.*

Per la prop. prec. può ritrovarsi il valore numerico di sen. 1'. E si saprà, per lo Corol. 1. Prop. 9, il seno del suo doppio, cioè si saprà benanche sen. 2'.

Inoltre per la Prop. 5. si renderà noto cos. 1'. E 'l raggio trigonometrico si ponga $=1$; sarà per lo Cor. 2. della Prop. 9.

$$1 : 2\cos.1' :: \text{sen}.2' : \text{sen}.1' + \text{sen}.3'.$$

E quindi avrassi

$$\text{sen}.3' = 2\cos.1'.\text{sen}.2' - \text{sen}.1'.$$

E da simil principio discendendo avremo i seguenti seni, con impiegarvi la sola moltiplica di aritmetica, e la sottrazione, cioè:

$$\text{sen}.4' = 2\cos.1'.\text{sen}.3' - \text{sen}.2'$$
$$\text{sen}.5' = 2\cos.1'.\text{sen}.4' - \text{sen}.2'.$$
$$\text{sen}.6' = 2\cos.1'.\text{sen}.5' - \text{sen}.4'.$$

Questa operazione, che potrebbe estendersi insino all' arco di 90°, cioè effettuandola per 5400 archi, che vadan successivamente crescendo di 1', si arresta all' arco di 60°. E poi per lo Corol. 2. Prop. 7., e con più agevol calcolo si rinverranno

$$\text{sen}.(50^\circ+1') = \text{sen}.(59^\circ+59') + \text{sen}.1'.$$
$$\text{sen}.(60^\circ+2') = \text{sen}.(59^\circ+58') + \text{sen}.2'.$$

. . . .

$$\text{sen}.61^\circ = \text{sen}.59^\circ + \text{sen}.1^\circ$$
$$\text{sen}.62^\circ = \text{sen}.58^\circ + \text{sen}.2^\circ$$
$$\text{sen}.63^\circ = \text{sen}.57^\circ + \text{sen}.3^\circ$$

ec.

Ritrovati i seni degli archi di un quadrante, i quali si sogliono distribuire in due colonne verticali, una contenente i seni fino a 45°; e l' altra,

che comprende i coseni di questi archi, cioè i seni da $89^\circ + 59'$ a 45°; se ne potran calcolare le loro tangenti, e seganti, colle analogie dello Scolio n°. 17. Ed ecco esposto il modo da costruire con sole operazioni della volgare aritmetica il canone lineare.

44. *Scol.* Siccome nell' uso ordinario di questo canone per la risoluzione de' triangoli, imbarazzerebbero non poco le lunghissime moltipliche, e divisioni, che convien fare; perciò i trigonometri han pensato di aggiugnere al canone lineare i logaritmi corrispondenti a' numeri in esso contenuti; vale a dire hanno stabilita un' altra specie di canone, che dicesi logaritmico, e ch' è *quello di* cui si fa uso. Ed in alcune Tavole si trova a dirittura rapportato il solo canone logaritmico, trascurandosi il lineare come inutile. Intanto sarebbe assolutamente superfluo il dir qui qualche cosa circa il canone logaritmico; poichè questo trovasi a sufficienza spiegato nel principio delle ordinarie *Tavole de' seni*, ed è facilissimo l' intenderlo a chi non ignòra l' ordinaria teoria de' logaritmi volgari.

PARTE II.

PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

45. *In ogni triangolo rettangolo l' ipotenusa sta a ciascun lato, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.*

Imperocchè se descrivasi col centro A (*fig.7*) intervallo AB l' arco circolare BD, è chiaro che il cateto BC sia seno dell' arco BD, o sia dell' angolo BAC: e quindi dovrà stare

BA : BC :: 1 : sen.CBA

E similmente si dimostrerebbe che sta

BA : AC :: 1 : sen.BCA.

46. *Cor.* Adunque starà pure

BC : CA :: sen.BAC : sen.CBA.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

47. *In ogni triangolo rettangolo un lato sta all' altro, come il raggio trigonometrico alla tangente dell' angolo ad esso opposto.*

Ed un lato sta all' ipotenusa, come il raggio trigonometrico alla segante dell' angolo adjacente.

Poichè se descrivasi col centro A intervallo AC l' arco circolare CE, è chiaro che CB dinoti la tangente dell' arco CE, e quindi dell' angolo in A, e che AB rappresenti la segante di quell' arco, o di quest' angolo. Laonde dovrà stare

AC : CB :: 1 : tang.A,

AC : AB :: 1 : seg.A.

e queste sono le due analogie proposte nel presente Teor. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

48. *In ogni triangolo i lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Dal vertice A (*fig.*8) di uno degli angoli del triangolo ABC si abbassi sul lato opposto la perpendicolare AD, si avrà nel triangolo rettangolo BAD, BA:AD :: 1 : sen.B (45), e quindi AD = BA × sen.B. E similmente si ricaverà dal triangolo CAD esser AD = CA × sen. C. Laonde dovrà risultarne BA × sen.B = CA × sen.C : e quindi considerando i seni come linee rette si vedrà esser (14. VI.)

CA : BA :: sen.B : sen.C

E nel modo stesso abbassando da B la perpendicolare sul lato AC si dimostrerà che sia

BA : BC :: sen.C : sen.A.

Quindi, per equalità, se ne conchiuderà anche
CA : BC :: sen.B : sen.A

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

49. *In ogni triangolo il massimo lato sta alla somma degli altri due, come la differenza di questi alla differenza de' segmenti del massimo lato.*

Col centro A (*fig*.9) intervallo il minimo lato AB si descriva il cerchio B*b*FO, che seghi gli altri due lati BC, CA in *b*, ed F: e poi la CA si protragga sino al cerchio in O. Sarà CO uguale a CA+BA, e CF uguale a CA—BA. Ed essendo C*b* uguale a CD—D*b*, sarà uguale a CD—DA.

Ciò premesso, per la natura del cerchio, il rettangolo OCF è uguale all'altro BC*b*. Dunque sarà CB : CO :: CF : C*b*, cioè CB : CA+AB :: CA—AB : CD—DB. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

50. *In ogni triangolo la somma de' lati è alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base alla tangente della semidifferenza di essi.*

Si circoscriva al triangolo ACB (*fig*.10) il cerchio,

e dal centro O di questo si tirino i raggi OG, OF perpendicolari ai lati AC, AB, e congiunto l' altro raggio OA, gli si abbassino dai punti G, F le perpendicolari GL, FH, che sono i seni degli angoli GOA, AOF, cioè B, e C; finalmente si unisca la GF, e gli si abbassi dal centro O la perpendicolare OM. E poichè l' angolo GOA è uguale a CBA, e l' angolo AOF a BCA; quindi sarà l' angolo GOF quanto la somma degli angoli B, e C, e perciò l' angolo GOM, ch' è metà dell' angolo GOF sarà la semisomma degli angoli B, e C. Di più essendo l' angolo GOK = GOM + MOK sarà esso uguale ad FOM + MOK, cioè = FOK + 2KOM; e perciò GOK — KOF = 2KOM: quindi KOM sarà la semidifferenza degli angoli GOK, KOF ossia B, e C.

Or essendo simili i triangoli GKL, FKH sta GK : KF :: GL : FH, cioè :: AC : AB (48), e componendo sarà GF : FK :: CA+AB : AB, e poi dividendo, ed invertendo si avrà FK : GK — KF :: AB : AC — AB. Laonde, per equalità, dovrà stare GF : GK—KF :: CA+AB : CA — AB. Ma, presa MN = MK, GN sarà uguale a KF, e GK — KF è quanto GK — GN cioè NK; adunque sarà CA+AB : CA — AB :: GF : NK, o pure :: GM : MK. Quindi, siccome preso OM per raggio, le MG, MK rappresentano le tangenti degli angoli MOG, MOK, cioè $\frac{1}{2}$(B+C) ed $\frac{1}{2}$(B—C (47); perciò si avrà

$$CA+AB : CA-AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}.$$

Cioè la somma de' lati è alla lor differenza ec. C.B.D.

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

51. In ogni triangolo, dati due angoli è anche dato il terzo, ch'è il supplemento a due retti della somma de' due dati; e perciò nel triangolo rettangolo, s'è dato uno degli angoli acuti, sarà dato anche l'altro. Di più in questo triangolo, se sono dati due lati, si conoscerà il terzo per mezzo della Prop. 4., e senza operazioni trigonometriche

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

52. *In un triangolo rettangolo dato uno de' lati, ed un' altra delle sue parti ad arbitrio; determinare le rimanenti parti.*

CASO I.

Sien dati i cateti AC, CB (*fig.* 7). Per determinare l'angolo in A, si faccia

AC : CB :: R : tang. A (47)

Si farà nota la tangente dell'angolo A; e quindi un tal angolo apparirà dalle tavole.

CASO II.

Che se diasi il cateto AC, e l'ipotenusa AB. Si troverà l'angolo in B facendo

AB : AC :: R : sen. B (45)

donde si farà anche noto quello in A; e si sarebbe trovato direttamente questo per mezzo della seguente analogia

AC : AB :: R : seg. A (47)

CASO III.

E dandosi il cateto AC, ed uno degli angoli acuti, e perciò anche l' altro. Per determinare l' altro cateto BC, bisognerà fare

R : tang.A :: AC : CB (47)

o pure sen.B : sen.A :: AC : CB (45)

Ma la prima analogia è da preferirsi alla seconda; poichè il primo termine R di quella è = 1. E volendo l' ipotenusa AB, converrebbe fare

R : seg.A :: AC : AB (47)

o pure sen.B : R :: AC : AB (45)

CASO IV.

Finalmente dandosi l' ipotenusa AB, ed uno degli angoli alla base, e quindi l' altro: se si voglia il cateto AC, si dovrà fare

R : sen. B :: AB : AC (45)

E poichè non vi resta altra combinazione a fare; perciò si sarà completamente risoluto il Problema proposto. C. B. F.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

53. *In un triangolo obbliquangolo, date tre delle sue parti, compresovi sempre uno de' lati; determinare le rimanenti parti.*

CASO I.

Sieno dati in primo luogo gli angoli in A, B (*fig.*8), e quindi l' altro in C, ed il lato AB; e si cerchino gli altri due lati BC, AC.

Si faccia sen. C : sen. A : : BA : BC (48)
e similmente sen. C : sen. B : : BA : AC (48)
si avranno in tal modo i lati BC, AC.

CASO II.

Che se diansi i lati AB, AC e l' angolo C opposto ad uno di essi lati AB; si troverà l' angolo in B opposto all' altro lato AC facendo

AB : AC : : sen. C : sen. B (48)

Quindi sen. B si farà noto; e dalle tavole apparirà l' angolo B, per conseguenza quello in A, e finalmente il terzo lato BC (Cas.1.)

È però da avvertirsi per questo secondo Caso, che se mai l' angolo dato è opposto al lato maggiore, allora l' angolo opposto all' altro lato dato dovrà essere necessariamente acuto; poichè dev' essere minore del dato (14.V.), e quindi acuto, quando anche quello sia ottuso; mentre un triangolo non può avere due angoli ottusi, o uno ottuso, e l' altro retto. Che se poi l' angolo dato è opposto al lato minore, com' è nella fig. 9, in cui l' angolo dato C sta opposto al lato BA minore di AC; allora la specie dell' angolo opposto al lato AC sarà *dubbia*, cioè potrà esso essere acuto, o ottuso. In fatti descrivendosi col centro A intervallo il lato minore AB il cerchio BOF; questo dovrà segare il lato BC in *b*, e congiunta la A*b* avrà gli stessi dati sì il triangolo ABC, che l' altro A*b*C; per conseguenza si sarà in dubbio se si risolva l' uno, o l' altro, a meno che le circostanze della quistione non tolgano l' incertezza.

*

CASO III.

E se sien dati i due lati BA, AC (*fig.* 10) e l' angolo in A da essi compreso; si troverà ciascuno degli angoli alla base facendo

$$AC+AB : CA-AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2} \quad (50)$$

Si avrà in tal modo la tangente dell' angolo, ch' è semidifferenza degli angoli B, C, e quindi un tal angolo si farà noto dalle tavole: e perciò se esso si aggiunga alla metà della somma degli angoli B, C si avrà l' angolo maggiore B, se se ne tolga si avrà il minore C (*).

CASO IV.

Finalmente se sien dati i tre lati BC, CA, AB (*fig.* 9), e si cerchino gli angoli.

Si abbassi sul maggior lato BC la perpendicolare AD dal vertice dell' angolo A, che gli è opposto, e poi si faccia

$$BC : CA+AB :: CA-AB : CD-DB \quad (49).$$

Ed avuta questa differenza de' segmenti della base BC si aggiunga essa alla metà di tal base, a fine di averne il maggior segmento CD, e poi se ne tolga per ottenere il minor di essi BD*: è chiaro che dalla risoluzione de' due triangoli rettan-

(*) *Che essendo M la somma di due quantità, ed N la differenza loro,* $\frac{1}{2}(M+N)$ *dinoti la maggiore, ed* $\frac{1}{2}(M-N)$ *la minore, si può intuitivamente rilevare dal vedere, che in effetti* $\frac{1}{2}(M+N)+\frac{1}{2}(M-N)=M$, *ed al contrario che* $\frac{1}{2}(M+N)-\frac{1}{2}(M-N)=N$.

goli ABD, ACD, i quali hanno le condizioni del Cas. 2. del Probl. prec., si faranno noti gli angoli B, C, e per conseguenza il terzo A.

Ed ecco risoluti tutt' i casi de' triangoli obbliquangoli. C. B. F.

54. I ristretti limiti di un Trattato elementare di Trigonometria non permettendomi un' estesa applicazione de' principj stabiliti, mi limiterò a darne quì un saggio nel seguente Problema, il qual comprende più di uno de' casi di risoluzione poc' anzi esposti. Del resto chiunque volesse spaziarsi nell' applicazione della Trigonometria Rettilinea alla Geometria, potrà dirigersi al dotto Trattato di Trigonometria del Sig. Cagnoli, in dove verso la fine del Cap. XI. troverà molti di questi esempj ingegnosamente condotti; e nel Cap. XIII. potrà anche estesamente istruirsi nelle pratiche di tal Trigonometria sul terreno.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

55. *Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare l' inclinazione di que' piani ne' quali esistono due di essi angoli.*

L'angolo solido proposto sia quello in A (*fig.* 11), e preso in un suo lato AD il punto D ad arbitrio, si elevino ad un tal lato, e ne' piani DAB, DAC rispettivamente, le perpendicolari DB, DC: è chiaro che l' angolo BAC dinoterà l' inclinazione

del piano DAB all'altro DAC (d. 6. XI.) .

Si congiunga la BC, e poi si risolva ciascuno de' triangoli rettangoli ADB, ADC ne' quali è noto il cateto AD, che gli è comune, ed inoltre nel primo di essi è noto l' angolo DAB, è nell' altro l' angolo DAC (Cas.3. p.14); si faranno note nel primo le BD, BA, e nel secondo le CD, CA. Ciò posto nel triangolo CAB vi saranno noti i due lati CA, AB, e l' angolo in A da essi compreso; che perciò si farà nota la CB (Cas.3. p.15). E finalmente nel triangolo CDB essendovi noti i tre lati, si determinerà l' angolo CDB (Cas.4. p.15). C.B.D.

FINE

DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

ELEMENTI
DI TRIGONOMETRIA SFERICA



DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

56. *La comune sezione di un piano con una sfera è un cerchio.*

La sfera BAE (*fig.* 12) sia segata dal piano ABC, sul quale dal centro O della sfera si abbassi la perpendicolare OD; e presi ovunque nel perimetro della sezione ABC i punti B, C, si uniscano le OB, OC, DB, DC. E poichè la OD è perpendicolare al piano ABC, gli angoli in D saranno retti; e perciò i due triangoli rettangoli ODB, ODC avendo uguali le loro ipotenuse OC, OB, ed il cateto OD comune, dovranno avere anche uguali gli altri cateti DB, DC. Laonde tutti i punti del perimetro della sezione ABC sono equidistanti dal punto D, ch'è dentro di tal sezione; quindi essa sarà un cerchio, ed il suo centro sarà D. C. B. D.

57. *Cor.* 1. Il centro di ogni cerchio, che rappresenta una sezione fatta in una sfera è dunque quel

punto in dove il piano di una tal sezione è incontrato dalla perpendicolare abbassatali dal centro della sfera: e di più il quadrato del raggio di questo cerchio è quanto la differenza de' quadrati del raggio della sfera, e della distanza del centro di essa da quello della sfera.

58. *Cor.*2. Ciò posto è manifesto, che a proporzione che si minorerà la distanza del centro di un di que' cerchi da quello della sfera, maggiore si farà il cerchio; e che questo diverrà il massimo, allorchè il piano che ha segata la sfera passa per lo centro di questa: e che perciò

59. *Def.* I. Tutti que' cerchi che hanno per centro quello della sfera si dicono *massimi*, e si chiaman poi cerchi *minori* tutti gli altri.

60. *Cor.* 1. Per due punti della superficie di una sfera non vi passa che un solo cerchio massimo; poichè il piano di questo dovendo passare anche per lo centro della sfera, viene a passare per tre punti dati, e perciò è determinato (2.XI).

61. *Cor.* 2. Di più due cerchi massimi intersegandosi in una retta, che passa per lo centro commune di essi, e ch'è perciò un diametro, debbono restar divisi scambievolmente per metà, e le loro circonferenze si verranno ad intersegare alla distanza di 180°.

62. *Def.* II. Quel diametro della sfera, ch'è perpendicolare al piano di un circolo massimo, si dice suo *asse*: e gli estremi di un tal diametro ne sono i *poli*.

Questi punti si dicono anche *poli di tutti gli altri cerchi* paralleli a quel circolo massimo.

63. *Cor.* È chiaro dall' addotta definizione, che due cerchi massimi non possono avere un medesimo polo: poichè altrimenti la congiungente un tal polo col loro centro comune, sarebbe perpendicolare a due piani diversi. Di più, che se per i poli di un circolo massimo ne passi un altro; gli archi di questo frapposti tra un de' poli, e la circonferenza del primo cerchio sieno di 90°.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

64. *Il raggio di una sfera sta a quello di un suo cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch' è tra la circonferenza del cerchio minore, ed il polo di esso.*

Sia ABC un cerchio minore, il cui polo sia E; sarà il suo raggio DB seno dell' arco BE (11); ma nel triangolo rettangolo BDO sta l' ipotenusa OB, cioè il raggio della sfera, al cateto BD, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo BOD, o dell' arco BE (45). Dunque ec. C.B.D.

65. *Cor.* Essendo i raggi di due cerchi come le loro circonferenze (se.p.3 Arch.), e quindi come le 360me parti di queste (15.V.), cioè come i loro gradi; ne segue, che *il grado di un cerchio massimo sta a quello di un cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch' è tra il cerchio minore, ed il suo polo.*

66. *Def.* III. L' *angolo* sferico è la scambievole

inclinazione di due archi di due cerchi massimi sulla superficie di una sfera.

67. *Def.* IV. *Triangolo sferico* è poi quella porzione di superficie sferica, ch' è terminata da tre archi di tre cerchi massimi.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

68. *Se in due archi disuguali si adatti una stessa corda; l'arco più piccolo che questa troncherà dal maggior cerchio, sarà minore dell' arco più piccolo, che la stessa taglierà dal cerchio minore.*

Sieno ABC, BEA (*fig.*13) i due cerchi, ed AB la loro corda comune: e tirata per gli loro centri F, G la retta EeHK, si uniscano le BH, HA, BK, KA. Inoltre si tiri la AeL, e finalmente uniscansi le Be, BL. E poichè gli angoli BeA, BKA fanno due retti, del pari che gli altri BLA, BHA; perciò quelli saranno uguali a questi. Ma l' angolo BKA è minore dell'altro BHA; adunque l'altro angolo BeA dovrà esser maggiore di BLA; e quindi il punto *e* dell' arco BeA dovrà cadere al di sotto dell' altro arco BEA: che perciò l' arco BEA dovrà esser maggiore dell' altro BeA. C.B.D.

ALITER

I due cerchi proposti AED, *b*E*c* (*fig.*14) suppongansi toccare al di dentro in E; si tiri la retta EFG per gli loro centri, e s'intendano applicate nell'uno, e nell'altro cerchio le corde *bc* uguali, BC perpen-

dicolarmente alla retta EFG, ed uguali tra loro: è chiaro che se il centro F del cerchio *b*E*c* si supponga scorrere sulla retta FE, finchè il punto K passi in H, cioè finchè la *bc* coincida colla BC, ed i punti *b*, *c* cadano sopra gli altri B, C; in tal caso l' arco *b*E*c* dovrà necessariamente comprendere l' altro BEC, e quindi esserne maggiore.

69. *Cor.* Quindi *l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza rappresenta la minima distanza, sulla superficie della sfera, tra i due punti pe' quali passa*. Ed è per questa ragione, ed anche per l' altra, che gli archi di cerchi massimi sono determinati, quando è dato il raggio della sfera cui si appartengono, ch' essi si prendono per lati de' triangoli sferici.

70. *Scol.* Che l'arco circolare AEB sia maggiore dell' altro A*e*B, si rileva facilmente dal principio 1. de' Teoremi di Archimede; ed ecco in qual modo. Si tirino agli archi AEB, A*e*B (*fig.* 13) le tangenti AY, AX nel punto A in dov'essi s' intersegano, e poi si tiri la AZ, che divida comunque l'angolo YAX compreso da quelle tangenti; una tal retta non potrà intersegare, che il solo arco esteriore AEB. E quindi chiaramente ne risulta, che si possa iscrivere in questo un perimetro, che non abbia di comune coll' arco A*e*B che i soli estremi A, B. Ed è facile il vedere, che si possa anche circoscriver sempre all' arco A*e*B un' altro perimetro di cui due lati sien parti delle tangenti tirate per A, B, e che affatto interseghi quel primo. Or è chiaro che essendo l' arco AEB maggiore del perimetro in esso iscritto, sia anche maggiore dell'altro pe-

rimetro circoscritto all'arco AeB, e quindi di tal arco.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

71. *Se in una sfera si tirino i tre cerchi massimi ADB, AEB, AFB (fig. 15.) i quali abbiano lo stesso diametro AB; gli angoli sferici in A, ed in B, che vengono formati dalle circonferenze di questi cerchi, saranno proporzionali agli archi DE, EF dell'altro cerchio massimo, che ha per asse la AB, e che sono intercetti tra le circonferenze di que' primi cerchi*: cioè, *sarà l' angolo DAE all' altro EAF, come l' arco DE all' arco EF.*

Imperocchè si prenda l' arco DC = DE, e l' altro FG = DF, e s' intendano descritti, per gli punti C, e G gli altri cerchi massimi ACB, AGB: è chiaro che se il punto C passi in D, il punto D passerà in E, e l' angolo CAD combacerà all' altro DAE; che perciò essi saranno uguali. E similmente l' angolo GAF sarà uguale all' altro FAE. Laonde l' angolo CAE, e l' arco CE saranno ugualmente multiplici dell' angolo DAE, e dell'arco DE; come pure l' angolo EAG, e l' arco EG saranno ugualmente multiplici dell' angolo EAF, e dell' arco EF. Ma è poi vero che l' angolo CAE uguaglierà, sarà maggiore, o pur minore dell'angolo EAG, secondo che l' arco CE pareggerà, sarà maggiore, o minore dell'arco EG. Adunque dovrà stare l' angolo DAE all' angolo

EAF, come l' arco DE all' arco EF. C. B. D.

72. *Cor.* Essendo gli archi DE, EF come gli angoli DOE, EOF al centro del cerchio HOK; saranno anche gli angoli sferici DAE, EAF come gli angoli DOE, EOF. Ma questi angoli sono precisamente quelli che rappresentano l' inclinazione de' cerchi ADB, AEB; AEB, AFB. Laonde *gli angoli sferici sono come gli angoli d' inclinazione de' piani de' cerchi, le circonferenze de' quali comprendono gli angoli sferici.* E siccome se tirinsi a' due cerchi ADB, AEB le tangenti AL, AM nel punto A; l'angolo LAM è quanto l'angolo DOE; quindi anche *l' angolo LAM delle tangenti i lati di un angolo sferico DAE, nel vertice di esso, si può prendere per l'angolo sferico.*

73. *Scol.* Essendo di 360° l' intera circonferenza HEK; anche di 360° dovranno essere tutti gli angoli sferici, che si verranno a formare in A da quanti cerchi si vogliono. E così si potrà dimostrare, che gli angoli sferici verticali sieno uguali; che gli angoli sferici conseguenti sieno uguali a due retti; ed altre cose, che per brevità tralascio.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

74. *Ogni lato di un triangolo sferico è minore di 180°.*

Imperocchè sieno DC, DA (*fig.* 16) due lati di un angolo sferico; è egli chiaro, che per terminare un triangolo sferico, debbono questi esser segati da

un terzo arco AC prima che si riuniscano di nuovo in B, alla distanza di 180° da D. Dunque ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

75. *La somma di due lati di un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.*

Poichè tirandosi da' vertici degli angoli di un triangolo sferico i tre raggi al centro della sfera cui esso si appartiene; si verrà a formare un angolo solido in cui due de' tre angoli che lo comprendono sono sempre maggiori del terzo (20.XI): che perciò i lati del triangolo sferico misurando quegli angoli, dovranno esser tali, che due, comunque presi sieno sempre maggiori del terzo.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

76. *I tre lati di un triangolo sferico presi insieme sono minori di* 360°.

Sia il triangolo ADC, i cui lati DA, DC si prolunghino fino ad incontrarsi di nuovo in B: ed essendo AC minore di AB+BC (75), ed AB+BC = 360° — AD — DC; sarà AC minore di 360° — AD — DC. Laonde aggiuntovi di comune AD + DC, sarà AC+AD + DC minore di 360°.

77. *Cor.* Quindi si potrà sempre supporre, che un triangolo sferico sia la base di un angolo solido, che ha per vertice il centro della sfera cui si appartiene un tal triangolo, ed i cui angoli sono misurati da' lati di questo (75,76).

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

78. *Se in un triangolo sferico, preso per polo ciascun vertice de' suoi angoli, si descrivano tre archi di cerchi massimi; questi incontrandosi formeranno un altro triangolo sferico, i cui lati, e gli angoli saranno supplementi degli angoli, e de' lati del proposto.*

P. 1. Imperocchè essendosi descritto col polo A (*fig.* 17) l' arco DE, è chiaro che il punto E sarà distante per 90° dall' altro A; ma col polo B si è descritto l' altro arco FE, che perciò E è anche a 90° di distanza da B: adunque il punto E sarà polo dell' arco AB. E così pure si dimostra, che D sia polo di AC, ed F di BC. Ciò posto si prolunghi l'arco AB in G, e l'altro AC in H: e poichè GE = 90° = DH; sarà GE + DH = 180° = DH + HE + GH = DE + GH. Ma GH è misura dell' angolo sferico A (71). Dunque DE è supplemento di A. Ed in simil guisa si dimostrerà essere DF supplemento di C, ed FE supplemento di B.

P. 2. Si prolunghi GA in L, sarà GL misura

dell' angolo E (71). Ma GA $= 90^\circ =$ BL, e perciò GA+BL, cioè GL+AB$=180^\circ$. Dunque l' angolo E è supplemento dell' arco AB. Ed in simil maniera si dimostrerà esser l' angolo F supplemento di BC, e l'angolo D supplemento di AC.

79. I triangoli ABC, FDE si chiamano *supplementali*, o *polari* l' uno dell' altro.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

80. *I tre angoli di un triangolo sferico sono sempre maggiori di* 180°, *e minori di* 540°.

P. 1. Imperocchè se gli angoli di un triangolo sferico non sono maggiori di 180°; i lati del triangolo supplementale saranno 360°, o anche di più. Lo che ripugna (76).

P. 2. Che se la somma degli angoli di un triangolo sferico potesse pareggiar 540°, cioè 6 retti, o almeno un di essi dovrebbe esser maggiore di due retti, o ciascuno de' tre pareggiar due retti. E l' una cosa, e l' altra è impossibile; poichè in tal caso di questa stessa grandezza dovrebbero anch' essere gli angoli rettilinei, che rispettivamente gli pareggiano (72).

81. *Cor.* 1. Da ciò ne segue, che *prolungandosi un de' lati di un triangolo sferico, l' angolo esteriore è sempre minore de' due interiori, ed opposti*; poichè questi insieme col terzo angolo del triangolo fanno più di 180°; mentre quello insieme

collo stesso terzo angolo sono uguali a 180° (73).

82. *Cor.*2. E se un triangolo sferico ha un angolo retto, gli altri due possono essere o anche retti, o ottusi, o pure acuti; ma in quest' ultimo caso ciascun di essi deve esser sempre maggiore di 45°.

83. *Scol.* La somma degli angoli di un triangolo sferico potendo variare da 180° fino a 540°, ne segue, che a differenza de' triangoli rettilinei, negli sferici non si può da due angoli determinare il terzo; che perciò i tre angoli di un triangolo sferico non formano due dati, come ne' rettilinei; ma tre distinti.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

84. *Due triangoli sferici che hanno i lati uguali, ciascuno a ciascuno, e che sono nella stessa superficie sferica, hanno anche uguali gli angoli compresi da' lati uguali.*

*Cas.*1. Sieno BAC, *bac* i triangoli sferici proposti; e primieramente i lati uguali corrispondansi alla stessa parte, cioè BA sia uguale a *ba* (*fig.*18.*n.*1), CA a *ca*, e BC a *bc*. Sia inoltre O il centro della sfera alla quale essi si appartengono; e da questo punto s' intendano condotti i raggi a' vertici degli angoli de' proposti triangoli: è chiaro che si verranno in tal modo a costituire nel punto O due angoli solidi (77) compresi ognuno da tre an-

gli uguali, ciascuno a ciascuno; che perciò essi si potranno far combaciare; ed allora cadrà il punto *a* in A, *c* in C, *b* in B: quindi il triangolo *bac* combacerà coll'altro BAC; e perciò gli sarà uguale.

Cas. 2. Che se i lati uguali non si corrispondano, come si vede nella *fig.*18.*n.*2, ove il lato BC del triangolo BAC è da una parte, e l' uguale *bc* nell' altro triangolo *bac* è dall' altra: in tal caso è chiaro, come la figura stessa rappresenta, che i due triangoli sferici BAC, *bac* sien propriamente quelli, che sottendono due angoli solidi verticali posti al centro O di una sfera. Or si vede, che il piano BA*ba* s' inclina all' altro BC*bc* sotto un angolo, ch' è uguale sì a quello compreso dagli archi BA, BC, che dagli altri *ba*, *bc* (72). Laonde i due angoli sferici ABC, *abc* sono tra loro uguali. E similmente si dimostrerà, che sia l' angolo ACB uguale all'altro *acb*, e l'angolo BAC uguale a *bac*. Dunque ec. C. B. D.

85. *Cor.* Da questa proposizione se ne deriva l' altra, che: *Se due triangoli sferici, che sono nella stessa superficie sferica, hanno gli angoli uguali, ciascuno a ciascuno, avranno anche uguali, l' uno, all' altro, i lati che sottendono questi angoli.* Poichè avendo i triangoli proposti uguali rispettivamente gli angoli; i loro supplementali avranno uguali rispettivamente i lati: quindi dovranno essere equiangoli (84); e perciò i loro supplementali, cioè i proposti, saranno equilateri tra loro. E ciò costituisce una differenza essenziale de' triangoli sferici da' rettilinei.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

86. *Due triangoli sferici, che sono sulla medesima sfera, se hanno due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, e l'angolo compreso uguale all' angolo compreso; avranno la base uguale alla base.*

Cas. 1. Sieno BAC, *bac* (*fig.*18.*n.*1) i triangoli sferici proposti, e sieno essi primieramente tali, che i lati uguali si corrispondano, in modo che sia BA=*ba*, BC=*bc*, e l' angolo B=*b*; è manifesto che il triangolo *bac* si può far combaciare coll'altro BAC, e quindi che siano uguali le rimanenti cose dell' uno, e dell' altro.

Cas. 2. Che se quei triangoli non sieno similmente disposti, come gli dinota la *fig.*18.*n.*2; allora congiunto similmente il centro O della sfera, cui essi si appartengono, co' punti A, B, C, *a*, *b*, *c*, è chiaro che essendo gli archi AB, BC uguali agli altri *ab*, *bc*, sien pure gli angoli AOB, BOC uguali agli altri *a*O*b*, *b*O*c*; ma di più i piani AOB, *a*O*b* sono similmente inclinati agli altri COB, *c*O*b*; poichè gli angoli ABC, *abc* si sono supposti uguali (77). Adunque è facile il vedere, che se pongasi il raggio BO in diretto coll' altro O*b*, debba il raggio AO essere in diretto con O*a*, e CO con O*c*: che perciò gli angoli AOC, *c*O*a* saranno uguali; e quindi anche gli archi AC, *ac*. C. B. D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

87. *Se due triangoli sferici di una stessa sfera, hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adjacenti a questi lati sono anche uguali; saranno pure uguali i rimanenti lati, ciascuno a ciascuno, quelli, cioè, che sono opposti agli angoli uguali.*

Cas. 1. Sieno primieramente i triangoli sferici BAC, *bac* (*fig.*18.*n.*1.) disposti in modo, che si corrispondano gli angoli uguali, cioè che essendo BA uguale a *ba*, sia l'angolo BAC=*bac*, e l'angolo ABC=*abc*: è manifesto, ch' essi si potranno far combaciare; e perciò sarà vero ciò che si è proposto.

Cas. 2. Che se gli angoli uguali non si corrispondano (*fig.*18.*n.*2); allora è chiaro, che congiunti i vertici degli angoli di ciascuno de' triangoli col centro O della sfera, se suppongasi che gli angoli uguali AOB, *bOa* sieno verticali; debbano per l' uguaglianza degli angoli CBA, *cba*, i piani BOC, e *bOc* esser similmente inclinati allo stesso piano AB*ba* (72): che perciò questi ne costituiranno un solo; ed un solo ne costituiranno, per la stessa ragione, i due altri piani COA, *aOc*. Adunque le CO, O*c* rappre-senteranno una sola linea retta; e quindi saranno uguali sì gli archi BC, *bc*, che gli altri CA, *ca*. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

88. *Gli angoli alla base di un triangolo sferico isoscele sono uguali tra loro.*

Ed un triangolo sferico, che ha due angoli uguali; ha pure uguali i lati che oppongonsi ad essi.

P. 1. Si biseghi la base BC in D (*fig.* 19), e per questo punto, e per l' altro A si faccia passare l'arco DA di cerchio massimo; è chiaro che i due triangoli sferici ABD, ACD, avendo i lati uguali, ciascuno a ciascuno, debbano avere anche uguali gli angoli B, C, i quali sottendono gli uguali lati AC, AB (84).

P. 2. Il triangolo sferico BAC (*fig.* 17), avendo uguali gli angoli in B, C; il suo supplementale DFE dovrà avere uguali i lati EF, FD. Laonde anche gli angoli in D, E saranno uguali (part. 1); e per conseguenza uguali saran pure i loro supplementi, cioè i lati AC, AB del triangolo sferico proposto.

89. *Cor.* Quindi *un triangolo sferico ch' è equilatero, deve essere anche equiangolo*; ed al contrario, *un triangolo sferico equiangolo sarà equilatero.*

90. *Cor.* 2. *Ed in un triangolo sferico isoscele, l' arco di cerchio massimo che passa per lo vertice del triangolo, e per lo punto medio della sua base, è perpendicolare a questa.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

91. *In ogni triangolo sferico, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato, ed il minore dal minore. Il maggior lato poi è sotteso dall' angolo maggiore, ed il minore dal minore.*

P. 1. Sia ADC (*fig.*16) un triangolo sferico, in cui l' angolo C è maggiore dell' altro A; e per mezzo dell'arco C*d* si supponga fatto l'angolo AC*d* uguale ad A, sarà l' arco A*d*=C*d* (part.2.p.13); e quindi l' arco AD, ch' è quanto A*d*+*d*D, sarà uguale a C*d*+*d*D. Ma C*d*+*d*D è maggiore di CD (75): dunque anche AD sarà maggiore di CD.

P. 2. Che se AD suppongasi maggiore di CD; l' angolo C dovrà esser maggiore dell' altro A; poichè nel caso che gli si supponesse uguale, sarebbe l' arco AD=DC (part.1); e supponendosi l'angolo C<A, ne risulterebbe l' arco CD>AD. E l' una, e l' altra cosa ripugna alla supposizione fatta.

Adunque in ogni triangolo sferico ec. C. B. D.

PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

AVVERTIMENTO.

92. Per brevità dinoteremo con A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, indicando queste lettere, quelle che sono al vertice di essi; e con *a*, *b*, *c* esprimeremo que' lati di un tal triangolo, che sono opposti a quelli angoli.

93. *Def.* III. La *Trigonometria sferica* dà le regole per risolvere su i triangoli sferici quello stesso Problema, che la Trigonometria Piana risolve su i triangoli rettilinei, cioè: *Date tre di quelle che diconsi parti del triangolo sferico, non esclusi i tre angoli* (83); *determinare le tre parti, che rimangono.*

94. *Scol.* Essendo sei le parti di un triangolo sferico trigonometricamente considerato, delle quali in ogni quistione ne debbono esser date tre, non esclusi i tre angoli; ne segue, che i casi di un tal Problema generale dovrebbero esser 20. Ma siccome alcuni di essi distinguonsi nella grandezza de'dati, e non già nella qualità loro, essendovene sei ne' quali sono sempre dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi; sei altri in cui sono dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto; e così pure tre in cui sono dati due angoli, ed un lato adjacente; e tre altri in cui sono dati due lati, e

l' angolo compreso, ciò fa sì, che le regole per la risoluzione de' 20 casi debbono generalmente riguardare i sei seguenti

I. *Se sien dati i tre lati.*

II. *O i tre angoli.*

III. *Se sien dati due lati, e l'angolo da essi compreso.*

IV. *O pure due angoli, ed il lato che gli è adjacente.*

V. *Se sien dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto.*

VI. *O pure due angoli, ed un lato opposto ad un di essi.*

Or tutte le regole per la risoluzione di questi casi posson dedursi da' tre seguenti Teoremi.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

95. *In ogni triangolo sferico i seni de' lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Sia CBA (*fig.*20) un triangolo sferico, ed i suoi lati CB, CA, AB sieno archi di cerchi massimi di una sfera, il cui centro sia S, e si uniscano le CS, BS, AS. Ciò posto dal vertice di un qualsivoglia angolo C si abbassi sul piano ad esso opposto ASB la perpendicolare CD, e poi da D su i lati SA, SB si calino le perpendicolari DE, DF, e si uniscano le CE, CF. E poichè il piano DEC è perpendicolare all' altro SAB (18.XI.), ed SE, che esiste in questo piano è perpendicolare alla loro comune sezione DE; sarà perciò essa anche

normale al piano CED (d.4.XI.), e quindi alla retta CE che giace in esso. Che perciò essendo le CE, ED perpendicolari nello stesso punto E alla comune sezione SA de' piani SAC, SAB in cui esse rispettivamente esistono; l' angolo CED dinoterà l' inclinazione di tali piani (d.6.XI.). E similmente si dimostra, che l' angolo CFD sia quello d' inclinazione del piano CSB all' altro SBA. Laonde gli angoli CED, CFD che rappresentano le inclinazioni de' piani CSA, CSB, in cui esistono gli archi CA, CB al piano ASB in cui è l' arco AB; si potranno prendere per gli angoli in A, e C del triangolo sferico CAB (72).

Or poichè nel triangolo rettilineo CED rettangolo in D sta

CE : CD :: R : sen. CED (45)

e similmente nell'altro triangolo rettangolo DCF, sta

DC : CF :: sen. CFD : R

sarà per equalità perturbata

CE : CF :: sen. CFD : sen. CED

Ma CE, e CF sono rispettivamente i seni degli archi CA, CB; e gli angoli CFD, CED sono gli stessi che gli angoli in C, ed in A del triangolo sferico CAB. Adunque sarà

sen. CA : sen. CB :: sen.B : sen.A

E similmente si potrà dimostrare, che sia

sen. CB : sen. BA :: sen.A : sen.C.

Laonde i seni de' lati di un triangolo sferico ec.

96. *Scol.* Questo Teorema comprende già in se la risoluzione de' casi enunciati ne' precedenti numeri V, e VI, come potrà vedersi nelle Proposizioni 21, e 22.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

97. *Il coseno di un lato di un triangolo sferico è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati, aggiuntovi il prodotto de' seni di questi nel coseno dell' angolo da essi compreso.*

Si supponga fatto l' apparecchio stesso del precedente teorema, e poi dal punto E si abbassi la EG perpendicolare alla SB, e per D si tiri alla stessa SB la parallela DH. Ed essendo gli angoli GES, GSE uguali ad un retto, essi pareggeranno l' angolo SED, ch' è retto: laonde togliendone di comune l' angolo GES, resterà l' angolo GSE, o BSA uguale ad HED.
Or nel triangolo EHD rettangolo in H, deve essere $HD = DE.\text{sen}.DEH$ (45) $= DE.\text{sen}.BSA = DE.\text{sen}.c$; ed è poi $DE = EC.\text{sen}.ECD = EC.\cos.DEC = \text{sen}.b.\cos.A$: laonde sarà $HD = \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$. Ma $SG = SE.\cos.ESG = SE.\cos.c$; ed $SE = SC.\cos.ESC = 1 \times \cos.b$. Adunque sarà $SG = \cos.b.\cos.c$: Per lo che essendo $SF = SG + GF = SG + DH$, sarà

$$\cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$$

Cioè in generale il coseno di un lato è uguale ec.
98. *Cor.* Essendo

$$\cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$$

$$\cos.c. = \cos.b.\cos.a + \text{sen}.b.\text{sen}.a.\cos.C$$

$$\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.a.\text{sen}.C}{\text{sen}.A} \quad (95)$$

si avrà sostituendo questi valori di cos.c, e di sen.c nella prima equazione

$$\cos.a = \cos.b(\cos.b.\cos.a + \text{sen}.b.\text{sen}.a.\cos.C)$$
$$+ \text{sen}.b.\text{sen}.a.\text{sen}.C \times \frac{\cos.A}{\text{sen}.A}$$

e quindi sarà cot.A =

$$\frac{\cos.A}{\text{sen}.A} = \frac{\cos.a - \cos.b^2\cos.a - \text{sen}.b.\text{sen}.a.\cos.b.\cos.C}{\text{sen}.b.\text{sen}.a.\text{sen}.C}$$

e ponendo in tal espressione $1-\text{sen}.b^2$ per $\cos.b^2$ (29), cot.a per $\frac{\cos.a}{\text{sen}.a}$, e cot.C per $\frac{\cos.C}{\text{sen}.C}$, si avrà

$$\cot.A = \cot.a.\frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}.C} - \cos.b.\cot.C$$

E se invece di eliminar dalla prima equazione cos.c, e sen.c si fosse eliminato cos.b, e sen.b, si sarebbe trovato ugualmente

$$\cot.A = \cot.a.\frac{\text{sen}.c}{\text{sen}.B} - \cos.c.\cot.B$$

99. *Scol.* Siccome dati i seni degli archi b, c, sono anche dati i loro coseni; così l'equazione del presente Teor., la quale esprime il rapporto, che v'è tra un lato di un triangolo cogli altri due, e coll'angolo da questi compreso, non contiene che solamente quattro grandezze diverse; e perciò è chiaro che da tre di esse si potrà determinar la quarta. Cosi se sien dati sen.b, sen.c, e cos.A, vale a dire due lati, e l' angolo compreso, si potrà determinare il terzo lato; il che risolve i casi espressi nel n°. III. E se fossero dati i tre lati, e quindi cos.a., cos.b, cos.c, sen.b, sen.c; si potrebbero determinar gli angoli: ed in questo modo restano risoluti quelli altri casi, che contengonsi nel n°. I.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

100. *Il coseno di un angolo è uguale al prodotto de' seni degli altri due angoli nel coseno del lato opposto a quel primo angolo, toltone il prodotto de' coseni di questi secondi angoli.*

Dinotino A′, B′, C′ gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed a', b', c' i lati di esso; sarà

$$\cos.a' = \cos.b'.\cos.c' + \text{sen}.b'.\text{sen}.c'.\cos.A' \quad (97).$$

Ma $\cos a' = -\cos.A$ (18); $\cos.b' = -\cos.B$; $\cos.c' = -\cos.C$; $\text{sen}.b' = \text{sen}.B$; $\text{sen}.c' = \text{sen}.C$; $\cos.A' = -\cos.a$.

Adunque fatte queste sostituzioni, e poi moltiplicando per -1 il risultato, si avrà

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos B.\cos.C.$$

101. *Cor.* Se si facciano sull' equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos.B.\cos.C$$

le stesse operazioni che si sono fatte nel Corollario del Teorema precedente si otterrà

$$\cot.a = \cot.A\frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.b} + \cot.b.\cos.C$$

102. *Scol.* E quindi se sieno dati gli angoli A, e C, ed il lato b adjacente ad essi, si saprà l'angolo B opposto ad un tal lato (100): e dandosi i tre angoli, si potrà determinare ciascuno de' lati. Vale a dire che per mezzo di questo terzo Teorema restano risoluti gli altri casi compresi ne' num. IV, e II.

RIDUZIONI DELLE ANALOGIE DIMOSTRATE NE' PRECEDENTI TEOREMI, NEL CASO, CHE IL TRIANGOLO SFERICO SIA RETTANGOLO.

103. I. Essendosi dimostrato che sia

$$\text{sen.}\,a : \text{sen.}\,b :: \text{sen. A} : \text{sen. B}$$

se l'angolo in A sia retto, e quindi sen. A uguale al raggio; la presente analogia si trasmuterà nell' altra

$$\text{sen.}\,a : \text{sen.}\,b :: 1 : \text{sen. B}$$

e darà luogo alla seguente verità

In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno dell' ipotenusa sta al seno di un lato, come il raggio al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.

104. II. Inoltre essendo

$$1 \times \cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen.}b.\text{sen.}c.\cos.\text{A} \ (97)$$

se il triangolo si supponga rettangolo in A, e quindi cos. A = o (18), sarà $1 \times \cos.a = \cos.b.\cos.c$; e perciò $1 : \cos.b :: \cos.c : \cos.a$, cioè

Il raggio al coseno di un lato dell' angolo retto, come il coseno dell'altro lato al coseno dell'ipotenusa.

105. III. Or $1 \times \cos.\text{B} = \text{sen.A}\,\text{sen.C}\cos.b - \cos\text{A}\cos\text{C}$ (100); e sen. A = 1, cos. A = o (18): laonde sarà

$$1 \times \cos.\text{B} = \text{sen.C}.\cos.b\,;$$

e quindi $1 : \cos.b :: \text{sen.C} : \cos.\text{B}$, cioè

Il raggio al coseno di un lato, come il coseno dell'angolo adjacente al coseno dell'angolo opposto.

106. *Scol.* Le tre precedenti riduzioni de' Teoremi generali (95, 97, 100), e le tre altre verità, che or ora dimostreremo, formano, come si vedrà al n. 115, i principj di risoluzione per tutt' i casi de' triangoli sferici rettangoli.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

107. *In ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta alla tangente di un angolo, come il seno del lato adjacente alla tangente del lato opposto.*

Sia CAB(*fig.*20) un triangolo sferico rettangolo in A, esistente su di una superficie sferica, che abbia per centro il punto S. Si congiungano le SA, SC, SB, ed abbassata dal vertice C di uno degli altri due angoli la perpendicolare CE sulla SA, si tiri da E la EF perpendicolare alla SB, e si unisca la CF. É chiaro, che essendo retto l'angolo sferico in A, debba il piano CSA esser perpendicolare all'altro ASB (72); quindi che la CE sia a questo stesso piano perpendicolare (d.4.XI.), e per conseguenza che il piano CEF sia anche perpendicolare all' altro ASB. Ma è poi la SF perpendicolare alla comune sezione EF de' piani ASB, EFC; quindi sarà essa normale a questo piano EFC, e perciò l'angolo SFC è retto (d.3.XI.): laonde l'angolo EFC compreso dalle EF, FC perpendicolari alla SB, sarà quanto l'angolo sferico in B(d.6.XI, e n°.72).

Or dal triangolo SFE rettangolo in F si rileva $SE = \frac{EF}{\text{sen.}FSE} = \frac{EF}{\text{sen.}c}$; e dall'altro SEC si ha poi $SE = \frac{CE}{\text{tang.}CSE} = \frac{CE}{\text{tang.}b}$: laonde $\frac{EF}{\text{sen.}c} = \frac{CE}{\text{tang.}b}$; e perciò EF:CE :: sen.$c$:tang.$b$. Ma per lo triangolo

CEF rettangolo in E, sta EF:CE :: 1:tang.EFC, cioè :: 1:tang.B: dunque sarà 1:tang.B :: sen.c:tang.b.

108. *Scol.*I. Avendo tutt' i seni lo stesso segno +, è chiaro che, nella precedente proporzione, debbano avere il segno stesso sì tang.B, che tang.b; donde se ne rileva, che: *N' triangoli sferici rettangoli, ciascun lato è della stessa specie dell'angolo che gli è opposto*, cioè, che il numero de' gradi che gli dinota è per tutti due minore di 90°, o maggiore.

109. *Scol.*II. Di più essendo 1 > sen.c; dovrà esser anche tang.B > tang.b. Quindi se mai i segni di queste sieno positivi, cioè che B, e b sieno ciascuno minore di 90° (18), sarà B > b; se poi saranno negativi, e perciò B, e b ciascuno maggiore di 90°, sarà B < b (19). Laonde *ne' triangoli sferici rettangoli, ogni angolo obbliquo non può mai esser minore se acuto, maggiore se ottuso del lato che gli è opposto*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

110. *In ogni triangolo sferico rettangolo, la tangente dell' ipotenusa sta alla tangente di un lato, come il raggio al coseno dell' angolo adjacente.*

Sia il triangolo sferico ABC rettangolo in A (*fig.* 16), i cui lati, e l' ipotenusa si prolunghino sino a 90°, e sieno essi BG, AF, BE: è chiaro, che il punto F essendo il polo dell' arco BAG, debba essere a 90° di distanza dal punto B. Ma questo punto B è anche distante per 90° dagli altri E,

G. Adunque per gli tre punti F, E, G vi passerà un arco di cerchio massimo il cui polo è B (63); che perciò gli angoli in E, ed in G sono retti. Quindi l' arco FE, ch' è complemento dell' altro EG, sarà complemento dell'angolo B, che da quest' arco è misurato: al contrario sarà l' angolo F, ch' è misurato dall' arco AG, il complemento di AB: ed è poi l' arco FC complemento di CA, e CE di CB. Ciò posto, poichè nel triangolo sferico FEC rettangolo in E sta

1 : tang.F :: sen.FE : tang.CE (107)

sarà, per l'apparecchio poc'anzi fatto, e permutando

1 : cos.B :: cot.BA : cot.BC

Ma sta cot.BA : cot.BC :: tang.BC : tang.BA (17)
Dunque sarà pure 1 : cos.B :: tang.BC : tang.BA.

111. *Scol.* Il triangolo CEF suol dirsi *complementale* dell' altro BCA.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

112. *In ogni triangolo sferico, rettangolo il raggio sta al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di un angolo alla cotangente dell' altro.*

Fatto lo stesso apparecchio di poc' anzi, si avrà nel triangolo sferico FCE complementale di BCA

1 : tang.C :: sen.CE : tang. FE (107)

e perciò sarà nel triangolo BAC, e permutando

1 : cos.BC :: tang.C : cot.B

ed anche 1 : cos.BC :: tang.B : cot.C (17) C.B.D.

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

113. Le parti di un triangolo sferico possono in modo combinarsi tre a tre, come si è veduto nel n°. 94, che ne risultino sei casi assolutamente diversi, alla risoluzione de' quali sono sufficienti que' principj che dal n°. 95 in poi abbiamo stabiliti, come passiamo a mostrare ne' seguenti numeri. Intanto per serbare, per quanto si può, l' uniformità di questo trattato con quello della Trigonometria Rettilinea, ed anche per proceder gradatamente, incominceremo dalla

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI.

114. Un triangolo sferico può aver retti o tutti tre i suoi angoli, o due, o uno (80): nel primo caso esso è intuitivamente risoluto; poichè ciascuno de' suoi lati deve necessariamente esser di 90° (77). Se poi ha due angoli retti, i lati che gli sottendono debbono essere anche di 90°: ma questi dati non ne formano che due, e quindi non valgono a far risolvere il triangolo. Ed in fatti se per gli poli A, B del circolo massimo HEK si facciano passare gli altri cerchi AEB, AFB, AGB; è chiaro che tutti i triangoli sferici EAF, FAG hanno due angoli retti, ed i lati a questi opposti di 90°: che perciò questi stessi dati potendo appartenere ad infiniti triangoli diversi; la specie delle rimanenti due parti di ciascun di essi non può restarne determinata. Quel-

E si troverà poi l' angolo obbliquo C adjacente al lato dato, con fare

tang.BC:tang.AC::R:cos.C (110); e $\cos.C=\frac{\text{tang}\,b}{\text{tang}.a}$

E l' altro angolo acuto B, che gli è opposto, si otterrà nel seguente modo

sen.BC:sen.AC::R:sen.B (103); e $\text{sen}.B=\frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.a}$

La specie di un tal angolo non sarà dubbia, sebbene espressa dal seno; poichè è la stessa di quella del lato AC, che gli è opposto (108).

CASO III.

E dandosi l' ipotenusa BC (a), ed un degli angoli obbliqui B; per avere il lato AC (b) opposto a quest' angolo, si dovrà fare

R:sen.B::sen.BC:sen.AC (103); e $\text{sen}.b=\text{sen}.a.\text{sen}.B$

Nè la specie di questo lato sarà dubbia (108).

L' altro lato AB (c) adjacente all' angolo B si avrà poi facendo

R:cos.B::tan.BC:tan.AB(110); e $\text{tang}.c=\cos.B.\text{tan}.a$

Finalmente il rimanente angolo C si otterrà per mezzo della seguente analogia

R:cos.BC::tan.B:cot.C (112); e $\cot.C=\cos.a.\text{tan}.B$

CASO IV.

Che se diasi un lato AC (b), e l' angolo C che gli è adjacente. Si avrà l' ipotenusa BC (a), col fare

cos.C:R::tang.AC:tang.BC (110); e $\text{tang}.a=\frac{\text{tang}.b}{\cos.C}$

L' altro cateto AB (c); si avrà nel seguente modo

R:sen.AC::tan.C:tan,AB (107); e $\text{tan}.c=\text{tan}.C.\text{sen}.b$

Finalmente per aver il rimanente angolo B, si dovrà dire

R.cos.C::cos.AC:cos.B (105); e $\cos.B = \cos.C.\cos.b$

CASO V.

Se poi diansi il lato AC (b), e l'angolo B che gli sta opposto. L'ipotenusa BC (a) si avrà col fare sen.B:sen.AC::R:sen.BC (103); e $\text{sen}.a = \frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.B}$

L'altro cateto AB (c) si avrà dalla proporzione tang.B:R::tang.AC:sen.AB (107); e $\text{sen}.c = \frac{\text{tang}.b.}{\text{tang}.B}$

Ed il rimanente angolo C si otterrà facendo cos.AC:R::cos.B:cos.C (105); e $\cos.C = \cos.B.\cos.b$

Questo caso è *dubbio*; poichè è chiaro che se si prolunghino i lati BC, BA del proposto triangolo sferico, finchè s' incontrino in D; l' angolo B sarà uguale all'altro D (71); e quindi gli stessi dati si apparterranno sì al triangolo sferico BAC, che all'altro DAC. Laonde non si potrà mai venire in cognizione se l' ipotenusa del triangolo che si risolve sia l' arco BC minore di un quadrante, o pur l' altro DC, che n' è il supplemento: e similmente non potrà determinarsi, se l' altro lato, e l' angolo ignoti sieno BA, e BCA, o pure i loro supplementi rispettivi DA e DCA, a meno che le circostanze della quistione non levino l' incertezza.

CASO VI.

Finalmente se sien dati gli altri due angoli B, C. Si avrà l' ipotenusa BC (a), nel seguente modo tang.B:cot.C::R:cos.BC (112); e $\cos.a = \frac{\cot.C}{\text{tang}.B}$

Ed un de' cateti AB (c) si rinverrà facendo cos.B:cos.C::R:cos.AB (105); e $\cos.AB = \frac{\cos.C}{\cos.B}$

SCOLIO

DI ALCUNI TRIANGOLI SFERICI, LA CUI RISOLUZIONE DIPENDE DA QUELLA DE' TRIANGOLI RETTANGOLI.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

116. *Risolvere un triangolo sferico, in cui un de' lati sia di 90°.*

Sia ABC un tal triangolo sferico (*fig.*17), e BC il suo lato di 90°. E poichè descritto il triangolo supplementale DFE, l' angolo F deve anch' essere di 90° (77); perciò questo triangolo supplementale sarà rettangolo. Laonde se i dati nel triangolo BAC si trasportino convenevolmente nel triangolo DFE, e che poi questo si risolva, si sarà anche risoluto l' altro BAC.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

117. *Risolvere un triangolo sferico isoscele.*

Abbia il triangolo sferico BAC (*fig.*19) i lati BA, AC uguali, e dal vertice A si conduca al punto medio D del lato opposto BC l' arco di cerchio massimo AD, il quale dividerà il triangolo BAC

in due triangoli rettangoli (90); ed è chiaro, che la risoluzione del triangolo BAC si ridurrà a quella di uno di questi triangoli rettangoli.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

118. *Risolvere il triangolo sferico BAC, in cui due lati AB, AC sieno supplementi l' uno dell' altro.*

Si prolunghino i lati AB, e BC, finchè s' incontrino in D; sarà AD uguale ad AC. E quindi il triangolo CAD, essendo isoscele, si potrà risolvere come nel Probl. prec. Ma i triangoli BAC, ADC sono in modo connessi, che dalle parti dell' un triangolo sono sempre determinabili quelle dell' altro; giacchè i lati AB, e BC dell'uno sono supplementi de' lati AD, DC dell' altro, il lato AC è comune, gli angoli in B, e D sono uguali, e gli angoli BAC, BCA sono supplementi degli angoli DAC, DCA. Adunque la risoluzione del triangolo BAC dipende da quella del triangolo isoscele ADC.

119. *Scol.* È facile il vedere, che nel triangolo proposto ABC debba esser anche l' angolo ABC supplemento dell'angolo BCA. Poichè essendo ACB supplemento di ACD, lo sarà anche dell' angolo in D (83); e quindi dell' altro in B ch' è uguale quello in D (72).

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI OBBLIQUANGOLI.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA:

120. *In un triangolo sferico obbliquangolo, date tre delle sue parti; determinare le rimanenti.*

CASO I.

Sien dati in primo luogo (*fig.*20) i tre lati BC, CA, AB, (a, b, c), e si cerchino gli angoli A, B, C

L'equaz. $\cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$ (97)

darà $$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$$

Onde si avrà il coseno dell' angolo A; e quindi quest' angolo. E similmente si determineranno gli altri. Ed è chiaro che in questo caso non vi resti dubbio sulla specie di ciascuno degli angoli: poichè essendo essi esibiti da' coseni; la specie loro resterà fissata dal segno di questi (18). E lo stesso può dirsi de' tre seguenti casi

CASO II.

In secondo luogo si sappiano i tre angoli A, B, C, e si cerchino i lati BC, CA, AB, (a, b, c) Si avrà il lato BC (a), per mezzo dell' equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos.B.\cos.C \quad (100),$$

dalla quale se ne ricava

$$\cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B.\cos.C}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

E per mezzo delle corrispondenti equazioni si determineranno gli altri due lati AB, AC (b, c).

CASO III.

Che se diensi due lati AC, AB (b, c), e l'angolo A da essi compreso; si determinerà il terzo lato BC (a), per mezzo dell' equazione

$$\cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$$

Ed il triangolo si terminerà di risolvere come nel Caso I. E se vogliansi ottenere i rimanenti angoli B, C senza prima determinare il lato BC (a), si adopreranno le due seguenti equazioni

$$\cot.B = \cot.b.\frac{\text{sen}.c}{\text{sen}.A} - \cos.c.\cot.A \quad (98)$$

$$\cot.C = \cot.c.\frac{\text{sen}.b.}{\text{sen}.A} - \cos.b.\cot.A \quad (98)$$

CASO IV.

E dandosi due angoli B, C, ed il lato BC (a), che gli è adjacente. Si avrà il terzo angolo A, per mezzo dell' equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos.B.\cos.C \quad (100)$$

E le rimanenti parti del triangolo si otterranno come nel Caso II. Che se queste vogliansi indipendentemente dall' angolo A, bisognerà cercarle nel seguente modo

$$\cot.b = \cot.B.\frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.a} + \cos.C.\cot.a \quad (101)$$

$$\cot.c = \cot.C.\frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.a} + \cos.B.\cot.a \quad (101)$$

CASO V.

In quinto luogo le parti date del triangolo sieno i due lati AC, AB (b, c), e l'angolo B opposto ad un di essi. Per aver l'angolo C, che

sta opposto all' altro lato, bisognerà fare

$$\text{sen.AC:sen.AB}::\text{sen.B:sen.C}(95);\text{sen}C=\frac{\text{sen.B.sen.}c}{\text{sen.}b}$$

È chiaro, che in questo caso la specie dell' g lo C sarà dubbia: un tal angolo C sarà però sempre maggiore dell'altro B, nel caso che si sappia che il lato c sia maggiore di b; ed al contrario.

Il lato CB si avrà pareggiando tra loro i due valori di cot. A, che si sono ottenuti nel n°. 98, e determinando per mezzo di quest' equazione il valore di cot.a.

Finalmente il rimanente angolo A o si determinerà per mezzo del n°. 95, o pure se si voglia indipendentemente dal lato BC (a), bisognerà cercarlo maneggiando l' equazione che risulta dal pareggiamento de' valori di cot.a, de' quali uno se ne trova espresso al n°. 101, e l' altro è facile a rilevarsi in vista di quello.

CASO VI.

Sien dati finalmente due angoli B, C, e 'l lato AC (b) opposto ad un di essi. Per avere il lato AB (c) opposto all' altro, si faccia

$$\text{sen.B:sen.C}::\text{sen.AC:sen.AB}(91);\text{sen.}c=\frac{\text{sen.}b\text{.sen.C}}{\text{sen B}}$$

Ed il terzo angolo A, ed il lato BC (c), che gli è opposto, si potranno determinare come nel Caso precedente. Le parti del triangolo dimandate in questo caso, sono *dubbie*, come nel precedente.

Adunque si è soddisfatto a quello che dimandavasi in questo Problema. C. B. F.

REGOLE NEPERIANE, E LORO USI.

121. Siccome il calcolo per la risoluzione de' triangoli, come già altra volta fu indicato, vien grandemente a semplificarsi per mezzo del canone logaritmico, sicchè questo, e non già il canone naturale si adopra negli usi pratici; perciò l' insigne inventore de' logaritmi *Nepero* adattò le regole della risoluzione de' triangoli sì rettilinei, che sferici al canone logaritmico, e non già al lineare. Intanto siccome sì per la risoluzione de' triangoli rettilinei, che per quella degli sferici rettangoli, la parte cercata si ottiene con un semplice quarto proporzionale dopo tre parti date, o le quantità trigonometriche, che le esprimono, come si è già veduto ne' num. 52, e 115, così è molto facile di passar da esse al calcolo logaritmico; poichè non deve farsi altro, che prendere la somma de' logaritmi de' due termini medj della proporzione, e sottrarne quello del primo, per ottenersi il logaritmo del termine cercato; donde poi facilmente questo se ne deduce, per mezzo delle ordinarie Tavole: ed è perciò che oltre le regole date ne' citati numeri, non occorre che altro se ne dica per l' applicazione de' logaritmi ad esse. Non è però così delle regole delle quali ci siamo serviti per la risoluzione de' triangoli sferici obbliquangoli. Imperciocchè venendo esse espresse da alcune formole analitiche composte la maggior parte di più termini, con difficoltà vi si potrebbe applicare il calcolo logaritmico, senza pri-

ma ridurle ad una forma più convenevole. E siccome una tal riduzione ci riconduce ad espressioni algebriche analoghe alle regole Neperiane per la risoluzione di questi triangoli, o facili a dedursi da esse; abbiam creduto perciò conveniente di esibire anche noi le suddette formole ridotte in forma logaritmica. In tal modo non solamente riescirà più agevole, e meno lungo il servirsene in pratica; ma anche in alcuni casi resteranno tolte quelle difficoltà, che, per la forma dell' espressione algebrica, potrebbero nascere ne' giovani non ancora versati nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, nel distinguere le diverse soluzioni di un Problema dal segno del valore dell' incognita, o nel conoscere quali valori sono di nessun conto, o quali debbonsi rigettare perchè impossibili. A quest' oggetto son destinate le seguenti quattro regole.

LEMMA.

122. *È positivo il coseno della metà di due angoli di un triangolo sferico meno il terzo: ed è negativo l' altro della metà de' tre angoli presi insieme.*

P. 1. Sieno A, B, C gli angoli di un triangolo sferico; i lati del suo supplementale saranno $180°—A$, $180°—B$, $180—C$ (79), ed un di essi $180°—A$ sarà minore di $360—B—C$, ch' è la somma degli altri due (75), cioè $B+C—A < 180°$, ed $\frac{1}{2}(B+C—A) < 90°$; che perciò il segno del coseno di quest' arco sarà positivo (18).

P. 2. Poichè $\frac{1}{2}(A+B+C)$ è sempre tra i $180°$, ed i $270°$ (80); è chiaro che il suo coseno debba esser negativo (18).

REGOLA I.

123. *Dalla somma della base, e di un lato di un triangolo sferico se ne tolga l' altro; e poi da' logaritmi de' seni della metà di queste due differenze se ne tolgano i logaritmi de' seni di que' lati; si avrà il logaritmo del seno della metà dell' angolo da essi compreso.*

Dinoti A un tal angolo, b, c sieno i lati che lo comprendono, ed a la base del triangolo sferico proposto.

Nell' equazione

$$2\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \cos.A \quad (\text{N.4})$$

si ponga per cos.A il suo valore $\frac{\cos.a - \cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$, (97), e poi si riduca; ne risulterà,

$$2\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c - \cos.a}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$$

$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\text{sen}.b.\text{sen}.c} \quad (36)$$

$$= \frac{2\text{sen}.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\times\text{sen}.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$$

(N.1 n°.IV): e dividendo per 2, e poi passando da' numeri a' logaritmi sarà $2\text{l.sen}\frac{A}{2} = \ldots\ldots\ldots$

$$\text{l.sen.}\frac{a+b-c}{2} + \text{l.sen.}\frac{a+c-b}{2} - \text{l.sen}.b - \text{l.sen}.c$$

124. *Scol.* Per mezzo di questa regola resta in pratica determinato agevolmente un qualunque angolo di un triangolo sferico da' suoi lati. Ed è chiaro, che nessun dubbio possa insorgere sulla specie di tal angolo, quantunque la sua metà sia esi-

bita dal seno; poichè questa deve necessariamente esser minore di 90° (72).

REGOLA II.

125. *Al logaritmo del coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico si aggiunga quello del coseno della metà di due di essi meno l' altro, e poi se ne tolgano i logaritmi de' seni di que' due stessi; s'otterrà il logaritmo del seno della metà del lato che sottende il terzo angolo.*

Nell' equazione

$$2\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \cos.a \ (\text{N}.4),$$

si sostituisca $\dfrac{\cos.A+\cos.B.\cos.C}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$ a $\cos.a$ (100); sarà

$$2\text{sen}.^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos.B.\cos C - \text{sen}.B.\text{sen}.C + \cos.A}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

$$= -\frac{\cos.(B+C)+\cos.A}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

$$= -\frac{2\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

(N.1.n°.111), e dividendo anche per 2, e poi passando da' numeri a' logaritmi, col cambiar da — in + il segno di $-\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ (122); sarà $2\text{l.sen}.\dfrac{a}{2} =$

$$\text{l.cos}.\frac{A+B+C}{2} + \text{l.cos}.\frac{B+C-A}{2} - \text{l.sen}.B - \text{l.sen}.C$$

126. *Scol.* E per mezzo di questa 2. regola è chiaro, che si saprà il seno della metà di un lato da' tre angoli del triangolo; nè potrà esservi dubbio sulla specie di questa metà, dovendo essa esser sempre minore di 90° (71).

REGOLA III.

127. *Al logaritmo della cotangente della metà di un angolo vi si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza de' lati, che gli sono adjacenti, e se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi, si avrà il logaritmo della tangente della semisomma de' rimanenti angoli.*

E si sarebbe avuto il logaritmo della semidifferenza di questi angoli stessi, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità si fossero sostituiti i logaritmi de' seni di esse.

Nell' equazione $\cos.B.\text{sen}.a = \frac{\cos.b - \cos.a.\cos.c}{\text{sen}.c}$ si sostituisca l' equivalente di $\cos.a$ (97), e poi essa si riduca, col porvisi $1 - \text{sen}.^2c$ per $\cos.c^2$, si avrà

$$\cos.B.\text{sen}.a = \cos.b\ \text{sen}.c - \cos.A.\text{sen}.b.\cos.c$$

E similmente si potrebbe ottener l'altra equazione

$$\cos.C.\text{sen}.a = \cos.c.\text{sen}.b - \cos.A.\text{sen}.c.\cos.b$$

se pur questa non si voglia ricavar dalla precedente con una semplice permutazione di lettere, come suol farsi. E sommando queste due equazioni, e poi riducendo, col sostituire $\text{sen}.(b+c)$ a $\text{sen}.b.\cos.c + \cos.b.\text{sen}.c$, si avrà

$$\text{sen}.a.(\cos.B + \cos.C) = (1 - \cos.A)\text{sen}.(b+c) \ \ldots . M$$

Or $\text{sen}.B = \frac{\text{sen}.A.\text{sen}.b}{\text{sen}.a}$, e $\text{sen}.C = \frac{\text{sen}.A.\text{sen}\ c}{\text{sen}.a}$; adunque sarà

$$\text{sen}.a.(\text{sen}.B + \text{sen}.C) = \text{sen}.A.(\text{sen}.b + \text{sen}.c)$$

$$\text{sen}.a.(\text{sen}.B - \text{sen}.C) = \text{sen}.A.(\text{sen}.b - \text{sen}.c)$$

Quindi se ciascuna di queste due equazioni si di-

vida per l' altra M, ne risulteranno le altre due

$$\text{I. } \frac{\text{sen.B}+\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}} = \frac{\text{sen.A}}{1-\text{cos.A}} \times \frac{\text{sen.}b+\text{sen }c}{\text{sen.}(b+c)}$$

$$\text{II } \frac{\text{sen.B}-\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}} = \frac{\text{sen.A}}{1-\text{cos.A}} \times \frac{\text{sen.}b-\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$$

Ma il primo membro della prima equazione pareggia tang.$\frac{1}{2}$(B+C), ed il primo della seconda è uguale a tang.$\frac{1}{2}$(B—C) (N.1. n°.V, e VI); ed i secondi membri di esse sono uguali rispettivamente a

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}, \text{ ed a cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sen }\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)}$$

(N.2, e 3). Dunque sarà

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sen }\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

E passando da numeri a' logaritmi, sarà

$$\text{l.tang.}\frac{\text{B}+\text{C}}{2} = \text{l.cot.}\frac{\text{A}}{2} + \text{l.cos.}\frac{b-c}{2} - \text{l.cos.}\frac{b+c}{2}$$

$$\text{l.tang.}\frac{\text{B}-\text{C}}{2} = \text{l.cot.}\frac{\text{A}}{2} + \text{l.sen.}\frac{b-c}{2} - \text{l.sen.}\frac{b+c}{2}$$

Le quali equazioni sono quelle della presente regola.

128. *Scol.* Con queste due equazioni, ritrovando semplicemente cinque logaritmi, è chiaro, che si abbia la tangente della semisomma, e della semidifferenza di due angoli di un triangolo sferico, e quindi tali angoli, quando sia dato il terzo angolo, ed i lati che lo comprendono. E per mezzo di ciascuna di esse si potrebbe anche avere un angolo, dati i lati che lo comprendono, e la somma, o la differenza degli altri due angoli; poichè è manifesto, che in tal caso resta determinato l.cot.$\frac{1}{2}$A.

Regola IV.

129. *Al logaritmo della tangente della metà di un lato di un triangolo sferico, vi si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza degli angoli ad esso adjacenti, e poi se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si otterrà il logaritmò della tangente della semisomma degli altri due lati.*

E si avrà il logaritmo della tangente della semidifferenza di tali due lati, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità, vi si sostituiscano i logaritmi de' seni di esse.

Dinotinsi con A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, e per a', b', c i lati opposti ad essi; avran luogo tra le parti di questo triangolo le seguenti due equazioni (127)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C'+B') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A' \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(c'-b')}{\cos.\frac{1}{2}(b'+c')}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C'-B') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A' \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(c'-b')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(c'+b')}$$

le quali colla sostituzione di $180°-b$, $180°-c$, $180°-a$, $180°-B$, $180°-C$ in luogo di B, C, A, b, c, si riducono alle altre due

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}a \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)}$$

E passando in ciascuna di queste due ultime equazioni da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$\text{l.tang.}\frac{b+c}{2} = \text{l.tang.}\frac{a}{2} + \text{l.cos.}\frac{B-C}{2} - \text{l.cos.}\frac{B+C}{2}$$

$$\text{l.tang.}\frac{b-c}{2}=\text{l.tang.}\frac{a}{2}+\text{l.sen.}\frac{B-C}{2}-\text{l.sen.}\frac{B+C}{2}$$

ch' è quanto nella presente regola si è enunciato.

130. *Scol.* Laonde, per mezzo di questa regola, si potranno rinvenire i logaritmi della metà della somma, e della metà della differenza de' due lati di un triangolo sferico, se pur sien dati il terzo lato, e gli angoli adjacenti ad esso: donde è chiaro, che tali lati appariranno ad un tratto. Ed è anche manifesto, che ciascuna di queste due ultime equazioni, ne offra un lato qualunque di un triangolo sferico, dall' esser dati gli angoli ad esso adjacenti, e la semisomma o pur la semidifferenza degli altri due lati; poichè con questi dati si farà noto l.tang.$\frac{1}{2}a$, e quindi a

CONCHIUSIONE

131. Dagli Scolj delle quattro precedenti regole si rileva, che per mezzo di esse restano facilmente e completamente risoluti i Casi I, II, III, IV. della Prop.25: gli altri due V, VI, che comprendono i casi *dubbj*, per la prima loro parte non hanno bisogno di altra formola di risoluzione, oltre quella che ne fu data al n°.121; per quella stessa ragione che fu indicata per gli triangoli rettilinei, e per gli triangoli sferici rettangoli al n°.120. Una voltà però, che siasi nel n°. V determinato l' angolo ignoto, ch' è opposto all' altro lato, e nel n°. VI il lato ignoto opposto all' altro angolo dato, si potrà ottenere il terzo angolo, ed il terzo lato, per mezzo delle formole delle Regole III, e IV, nelle quali le ignote sono tang.$\frac{1}{2}$A, e tang.$\frac{1}{2}a$.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

132. *Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare l' inclinazione di que' piani ne' quali esistono due di essi angoli.*

L'angolo solido proposto sia quello in O (*fig.*21), contenuto da' tre angoli piani FOD, DOE, EOF; e si supponga descritta col centro O, e con qualunque raggio una sfera. É chiaro che l' angolo solido proposto resterà sotteso da un triangolo sferico BAC nel quale sono dati i tre lati BA, BC, CA, perchè sono quegli archi che misurano i corrispondenti angoli piani BOA, BOC, COA: che perciò si potranno determinare gli angoli sferici in A, B, C (120c.1); e quindi si faranno anche noti gli angoli d' inclinazione scambievole de' tre piani FOE, FOD, DOE. C.B.F.

133. *Scol.* Le due soluzioni che abbiamo date di questo stesso Problema importante in pratica, come altrove faremo vedere, (55,e132) serviranno per ora a far rilevare, come si possa spesse volte vantaggiosamente adoperare la Trigonometria sferica in quistioni, che possonsi anche risolvere coll' altra Trigonometria. In fatti nel caso presente tutti i tre angoli d' inclinazione restano ad un tratto, e per mezzo di una sola operazione esibiti; mentre la Trigonometria Rettilinea non poteva esibirli che separatamente, e con più operazioni.

NOTE

Queste note contengono alcune verità facili a dedursi da' num. 33, e 36, e delle quali si ha bisogno nella dimostrazione delle Regole Neperiane

Nota I.

Se la somma degli archi ϕ, e θ s' indichi per m, e per n la differenza loro, sarà

$\phi = \frac{m+n}{2}$, e $\theta = \frac{m-n}{2}$ (N. pag.36.); i quali valori di ϕ, e θ, se sostituiscansi nelle espressioni in cui si sviluppano sen.$(\phi+\theta)$, sen.$(\phi-\theta)$, cos.$(\phi+\theta)$, cos.$(\phi-\theta)$ (33., e 36) daranno i valori corrispondenti a sen.m, sen.n, cos.m, cos.n, dalla somma de' quali due a due se ne dedurranno le seguenti quattro equazioni, cioè,

$$\text{I. } \text{sen}.m+\text{sen}.n = 2\text{sen}.\tfrac{1}{2}(m+n)\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{II. } \text{sen}.m-\text{sen}.n = 2\cos.\tfrac{1}{2}(m+n)\text{sen}.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{III. } \cos.m+\cos.n = 2\cos\tfrac{1}{2}(m+n)\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{IV. } \cos.m-\cos.n = 2\cos.\tfrac{1}{2}(m+n)\text{sen}.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

dalle quali, per mezzo della divisione, se ne ricaveranno le altre

$$\text{V. } \frac{\text{sen}.m+\text{sen}.n}{\cos.m+\cos.n} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(m+n)}{\cos\,\tfrac{1}{2}(m+n)} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m+n)$$

$$\text{VI. } \frac{\text{sen}.m-\text{sen}.n}{\cos.m+\cos.n} = \frac{\text{sen}.\tfrac{1}{2}(m-n)}{\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m-n)$$

E se la V equazione si divida per la VI, si avrà

$$\text{VII. } \frac{\text{sen}.m+\text{sen}.n}{\text{sen}.m-\text{sen}.n} = \frac{\text{tang}.\tfrac{1}{2}(m+n)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m-n)}$$

Nota II.

Ed essendo $\text{sen.}2\phi = 2\text{sen.}\phi.\text{cos.}\phi$ (34) ; sarà, ponendo $\frac{m+n}{2}$ invece di ϕ , $\text{sen}\, 2\,\frac{(m+n)}{2} =$

$$\text{sen.}(m+n) = 2.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(m+n).\text{cos.}\tfrac{1}{2}(m+n).$$

Laonde dividendo la prima, e la seconda equazione della nota precedente per questa, e poi riducendo, si avrà

$$\frac{\text{sen.}m+\text{sen.}n}{\text{sen.}(m+n)} = \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(m-n)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(m+n)}$$

$$\frac{\text{sen.}m-\text{sen.}n}{\text{sen.}(m+n)} = \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(m-n)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(m+n)}$$

Nota III.

Or dinotando per $\frac{1}{2}\phi$ un qualunque arco, è

$$\text{sen.}\phi = 2.\text{sen.}\tfrac{1}{2}\phi.\text{cos.}\tfrac{1}{2}\phi \qquad (34)$$

$$\text{cos.}\phi = \text{cos.}^2\tfrac{1}{2}\phi - \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\phi \quad (36)$$

Ed è poi il raggio $1 = \text{sen.}^2\frac{1}{2}\phi + \text{cos.}^2\frac{1}{2}\phi$; e perciò

$$1-\text{cos.}\phi = 2.\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\phi\,,$$

$$1+\text{cos.}\phi = 2.\text{cos.}^2\tfrac{1}{2}\phi$$

Adunque sarà

$$\frac{\text{sen.}\phi}{1-\text{cos.}\phi} = \frac{2.\text{sen.}\frac{1}{2}\phi.\text{cos}\frac{1}{2}\phi}{2.\text{cos.}^2\frac{1}{2}\phi} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\phi}{\text{cos.}\frac{1}{2}\phi} = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\phi$$

$$\frac{\text{sen.}\phi}{1+\text{cos.}\phi} = \frac{2.\text{sen.}\frac{1}{2}\phi.\text{cos.}\frac{1}{2}\phi}{2.\text{cos.}^2\frac{1}{2}\phi} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\phi}{\text{cos.}\frac{1}{2}\phi} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\phi$$

FINE.


S
T
A
D
B

